Prova n°1

Avisos :

1. Celulares desligados.
2. 2 horas de prova !
3. Só terá validade o que estiver a caneta !

Questão 1

Enunciar o teste da raíz.

Questão 2

Dizemos que duas sequências são adjacentes se uma é crescente, a outra é decrescente e a diferença das duas converge para 0.

a. Nos casos seguintes, as sequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ são adjacentes ? Justificar a resposta.
   (i) $u_n = 1 - 10^{-n}$ e $v_n = 1 + 10^{-n}$;
   (ii) $u_n = \ln(n+1)$ e $v_n = \ln(n+1) - \frac{1}{n}$;

b. Seja a um numero positivo e sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ as sequências definidas para todo $n \in \mathbb{N}^*$ por : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $v_n = \ln\left(a + \frac{1}{n}\right)$. Achar os valores de a tais que as sequências sejam adjacentes.

Questão 3

Estudar a convergência das séries seguintes

a. $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{\cos\left(e^n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^3}$;

b. $\displaystyle\sum_{n=3} \frac{(-1)^n}{e^{\sqrt{n}} - \arctan\left(n^{1/n}\right)}$;

c. $\displaystyle\sum_{n=1} \ln\left(e^{n\,\mathrm{sen}\frac{1}{n}} + \frac{n^3+\sqrt{n}}{\ln(n+2)+e^n}\right)$.

Questão 4

a. Usando o teste de comparação de séries, estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(\cos n)^6}{2^n}$.

b. Usando o teste de comparação com limite de séries, estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

c. Usando o teste da integral, estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1} ne^{-n}$.

d. Usando o teste da raiz, estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(\ln(2n))^n}{n^{2n}}$.

e. Usando o teste da razão, estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{e^{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}}{n!}$, ou seja, $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{e^{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}}{n!}$.

Questão 5

Usando as séries geométricas, escrever $3,141514151415......$ na forma de um número racional.

Professor Jérôme Rousseau