Prova n°2

Avisos :

1. Celulares desligados.
2. 2 horas de prova !
3. Só terá validade o que estiver a caneta !

Questão 1

Seja f uma função infinitamente derivável. Dar a definição de série de MacLaurin de f.

Questão 2

Resolver a equação diferencial seguinte em $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (x^2+1)y'(x)+4xy^2(x)=0 \\ y(0)=2. \end{cases}$$

Questão 3

Resolver a equação diferencial seguinte em $]1,+\infty[$:

$$y' + \frac{1}{3x}y(x) - y(x)^4 = 0.$$

Questão 4

Seja f a função definida por $f(x)=\frac{x}{4+3x}$ para todo x. Calcular $f^{(n)}(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Questão 5

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função 2π-periódica e tal que $f(x) = x^2$ se $x \in]-\pi, \pi]$.

a. Esboçar o gráfico da função f (não precisa justificar).

b. Calcular a série de Fourier da função f.

c. Calcular $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Questão 6

Lembramos que para todo $x \in (-1,1)$ temos $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Lembramos também que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} x$. Calcular as somas seguintes dentro dos seus domínios de convergência e achar o raio de convergência :

a. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2-2n-2)x^n$;

b. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2-n+1}{(n+1)!} x^n$. Dica : voce pode verificar que $2n^2-n+1 = 2(n+1)n - 3(n+1) + 4$.

Professor Jérôme Rousseau