# Prova n°1

Avisos : Celulares desligados ; 2 horas de prova ! Só terá validade o que estiver a caneta !

### Questão 1

Enunciar e provar o teste da raiz.

### Questão 2

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Prove que $\sum_{n=1} \frac{u_n}{n^2}$ é convergente.

### Questão 3

a. Verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\frac{n+3}{2n+9}\right) = -\ln 2 + \ln\left(\frac{3}{n+3}\right)$.

b. Estudar a convergencia da série $\sum_{n=1} \left(\frac{3n+5}{n+9}\right)^{\ln(n)}$.

c. Estudar a convergencia da série $\sum_{n=1} \left(\frac{n+3}{2n+9}\right)^{\ln(n)}$. (Dica : voce pode tentar comparar com a série $\sum_{n=1} \frac{1}{n^{\ln 2}}$.)

### Questão 4

a. Usando o teste de comparação, estudar a convergência da série $\sum_{n=1} \frac{(\operatorname{sen} n)^4}{4^n}$.

b. Usando o teste de comparação com limite, estudar a convergência da série $\sum_{n=1} \operatorname{sen}(\frac{1}{n})$.

c. Usando o teste da integral, estudar a convergência da série $\sum_{n=2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

d. Usando o teste da raiz, estudar a convergência da série $\sum_{n=2} \frac{n^n}{(\ln n)^n}$.

e. Usando o teste da razão, estudar a convergência da série $\sum_{n=1} \frac{\ln(n!)}{n!}$.

### Questão 5

Seja $a > 0$. Seja $u_0 > 0$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida por

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

a. Provar que $u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$.

b. Provar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{a}$.

c. Provar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

d. Provar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

e. Provar que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

f. Questão extra : Usando o fato que $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$, provar que

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leq (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

g. Questão extra : Provar que se $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ então para todo $n \geq 1$

$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$



Professor Jérôme Rousseau