Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Análise no $\mathbb{R}^n$

Professor Dr. Jérôme François Alain Jean Rousseau

Notas de Aula: Análise no $\mathbb{R}^n$

Turma 2017.1

Salvador-Bahia

Julho de 2017

Sumário

1 Topologia do Espaço Euclidiano

1.1 O Espaço Euclidiano n-dimensional

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, onde $x = (x_1, ..., x_n)$ com $x_i \in \mathbb{R}$ e $i \in 1, ..., n$.

Produto Interno:

$< x, y >=< (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) >= x_1y_1 + ... + x_ny_n.$

Distância Euclidiana:

$d(x, y) = \sqrt{< x - y, x - y >}$

Norma Euclidiana:

$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{< x, y >}$
$d(x, y) = \|x - y\|.$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$| < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|.$

Demonstração. Para $y = 0$ é imediato. Para $y \neq 0$,

$$0 \leq< x - \lambda y, x - \lambda y > . \tag{1}$$

Basta tomar $\lambda = \frac{<x,y>}{\|y\|^2}$.
Daí, a equação 1 se resume a $\|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda < x, y >= \|x\|^2 + \frac{<x,y>^2}{\|y\|^2} - 2\frac{<x,y>^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{<x,y>^2}{\|y\|^2} \Rightarrow \|x\|^2 \geq \frac{<x,y>^2}{\|y\|^2} \Rightarrow \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \geq< x, y >^2$. □

Desigualdade Triangular

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Demonstração. $\|x + y\|^2 =< x + y, x + y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >\leq \|x\|^2\|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$ □

Definição 1.1. *Seja E um $\mathbb{R}$ - espaço vetorial. Uma aplicação $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma norma se:*

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\|\lambda x\| \leq |\lambda| \cdot \|x\|$,

iii) $\forall x \in E$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Proposição 1.2. *Propriedades da Norma*

1) $\|x\| > 0$, $\forall x \neq 0_E$

$$\begin{aligned} \|x-x\| &\leq \|x\| + \|-x\| \text{ pela propriedade iii)} \\ 0 &\leq \|x\| + |-1|\|x\| \text{ pela propriedade ii)} \\ &\leq 2\|x\| \\ &\Rightarrow \|x\| \geq 0 \text{ se } \|x\| \neq 0 \text{ se } x \neq 0 \text{ pela propriedade i).} \end{aligned}$$

2) $\|x\| = \|-x\|$

3) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

Demonstração. $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$.
Por outro lado, $\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|y-x\|$.
Pelo item 2) temos que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$. □

Definição 1.3. *Seja* $\|.\|$ *uma norma em E. Então podemos definir a distância induzida pela norma* $d(x,y) = \|x-y\|$.

Exemplo 1.4. 1) *Norma Euclidiana*

$$\|x\|_2 = \|(x_1,...,x_n)\|_2 = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

2) *Norma da Soma (Norma 1)*

$\|x\|_1$ *é uma norma*

Demonstração.

a)

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow |x_1|_{\leq 0} + |x_2|_{\leq 0} + ... + |x_n|_{\leq 0} = 0 \Rightarrow 0, \quad \text{pois} \quad i \in 1,...,n \Leftrightarrow x = (0,...,0) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

b)

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \|\lambda(x_1,...,x_n)\| = \|(\lambda x_1,...,\lambda x_n)\| = |\lambda x_1| + ... + |\lambda x_n| \\ &= |\lambda|(|x_1| + ... + |x_n|) = |\lambda|\|x\|. \end{aligned}$$

c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

De fato,

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \|(x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)\| \\ &= \|(x_1+y_1,...,x_n+y_n)\| \\ &\leq |x_1+y_1|+...+|x_n+y_n| \\ &\leq |x_1|+|y_1|+...+|x_n|+|y_n| \\ &= \|x\|+\|y\|. \end{aligned}$$

□

3) *Norma da Soma (do sup ou infinita)*

$\|x\|_\infty = \max_{i \in 1,...n} |x_i|$

Exercício: $\|x\|_\infty$ é uma norma.

Definição 1.5. *Sejam $N_1 e N_2$ duas normas em E. Dizemos que $N_1 e N_2$ são equivalentes se existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in E$*

$$bN_1(x) \leq N_2(x) \leq aN_1(x).$$

Teorema 1.6. *Em um espaço de dimensão finita todas as normas são equivalentes.*

Demonstração. (Execício.) □

Observação 1.7. $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ *é uma norma.*

quando $p \to \infty$, $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ $(\max |x_i^p|)^{1/p} = \max |x_i|$

Bolas Abertas e Fechadas

Definição 1.8. *A bola aberta de centro x e raio r é definida por $B(x,r)$. A bola fechada de centro x e raio r é definida por $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|x-y\| < r\}$. A bola fechada de centro x e raio r é definida por $\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|x-y\| \leq r\}$.*

Exemplo 1.9. *Em $\mathbb{R}^2$.*

Coma norma $\|\cdot\|_2$,

$$\begin{aligned} B((0,0),r) &= \{y \in \mathbb{R}^2; \|(0,0)-(y_1,y_2)\|_2 < r\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2; \|(y_1,y_2)\|_2 < r\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2; \sqrt{y_1^2+y_2^2} < r\}. \end{aligned}$$

Coma norma $\|\cdot\|_1$,

$$\begin{aligned} B((0,0),r) &= \{y \in \mathbb{R}^2; \|(y_1,y_2)\|_1 < r\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2; |y_1| + |y_2| < r\}. \end{aligned}$$

Com a norma $\|\cdot\|_\infty$,

$$B((0,0),r) = \{y \in \mathbb{R}^2; |y_i| < r\}, \forall i \in 1,2,...,n$$

Definição 1.10. *Um conjunto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é limitado se existe uma bola* $B(x,r)$ *tal que* $B(x,r) \supset K$.

Proposição 1.11. *O conjunto* K *é limitado se, e somente se existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $\forall x \in K, |x| < M$.

Demonstração. Exercício! □

1.2 Conjuntos Abertos e Fechados

Definição 1.12. *Um conjunto* A *é aberto se para todo* $x \in A$ *existe um* $r > 0$ *tal que* $B(x,r) \subset A$.

Observação 1.13. *Uma bola aberta é um conjunto aberto. Uma bola fechada não é um conjunto aberto? Não! basta tomar um ponto fronteira.*

Definição 1.14. *Um conjunto* F *é fechado se o complementar* F^c *é aberto.* ($F^c = \mathbb{R}^n - F$).

Propriedades:

1) A união (finita ou infinita) de conjuntos abertos é aberta.

2) A interseção finita de conjuntos abertos é aberto. Mas não vale para interseção infinita.
Contra exemplo $\bigcap_n (x, \frac{1}{n}) = \{x\}$.

3) A interseção (finita ou infinita) de conjuntos fechados é fechado.

4) A união finita de conjuntos fechados é fechado.

5) Se o conjunto A é aberto e fechado então $A \neq \emptyset$ ou $A = \mathbb{R}^n$.

Definição 1.15. *Dizemos que* v *é uma vizinhança de* x *se existe* $r > 0$ *tal que* $B(x,r) \subset V$

Definição 1.16. *Seja* A *um conjunto. Dizemos que* x *é interior ao* A *se* A *é uma vizinhança de* x.
O interior de A, *notado por* $int(A)$ *ou* A° *é o conjunto dos pontos interiores a* A.

Proposição 1.17. **a)** *$int(A) \subset A$.*

b) *$int(A)$ é aberto.*

c) *$A = \int(A) \Leftrightarrow A$ é aberto.*

Demonstração. **a)** É imediato!

b) Seja $x \in int(A)$ Então existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$ Seja $y \in B(x,r)$ Como $B(x,r)$ é aberto, existe $r_1 > 0$ tal que $B(x,r_1) \subset B(x,r) \subset A \Rightarrow y \in int(A) \Rightarrow B(x,r) \subset \int(A)$. Logo $int(A)$ é aberto.

c) ($\Rightarrow$) É imediato pelo item b).
($\Leftarrow$) $int(A) \subset A$ pelo item *a*). Alem disso $A \subset int(A)$. De fato seja $x \in A$ como A é aberto existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A \Rightarrow x \in int(A) \Rightarrow A \subset int(A)$. Portanto, a volta é válida.

□

Definição 1.18. *Seja A um conjunto. Dizemos que x é aderente a A se toda vizinhança de x encontra A, ou seja, qualquer bola de centro x e raio r tem pelo menos um elemento de A (ou seja, se qualquer bola $B(x,r)$ tem pelo menos um alemento de A ($B(x,r) \cap A \neq \emptyset$)) O conjunto de todos os pontos aderentes a A é chamado de aderência ou fecho de A e notado por $\overline{A}$.*

Proposição 1.19. **a)** *$A \subset \overline{A}$*

b) *$\overline{A}$ é fechado.*

c) *$A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ é fechado.*

Demonstração. **a)** $x \in A$, $B(x,r) \cap Asupset\{x\}$ $\forall r > 0$ então $B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}$

b) $\overline{A}$ é fechado $\Leftrightarrow$ $(\overline{A})^c$ é aberto. Seja $x \in (\overline{A})^c \Rightarrow x \notin \overline{A}$. Então, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x,r) \subset A^c$. Seja $y \in B(x,r) \cap A$, $y \in B(x,r)$ (aberta) $\Rightarrow \exists r_1 > 0$ tal que $B(y,r_1) \subset B(x,r)$. Como $y \in \overline{A} \Rightarrow B(y,r_1) \cap A \neq \emptyset$, Absurdo, pois $B(y,r_1) \cap A \subset B(x,r) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(y,r_1) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x,r) \subset (\overline{A})^c \Rightarrow (\overline{A})^c)$ é aberto $\overline{A}$ é fechado.

c) ($\Rightarrow$) É imediato pelo item b).
($\Leftarrow$)$A \subset \overline{A}$ por *a*). Provemos agora que $\overline{A} \subset A$. Seja $x \in \overline{A}$. Se $x \in A^c$, $\exists r > 0$, $B(x,r) \subset A^c$ (pois A^c é aberto) $\Rightarrow B(x,r) \cap A = \emptyset$, absurdo, pois $x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A$. Portanto a volta é válida.

□

Propriedades:

1) $int(A)$ é o maior aberto contido em A, ou seja, para todo conjunto aberto $E \subset A$ temos que $E \subset int(A)$.

2) $int(A)$ é o menor fechado que contém A, ou seja, para todo conjunto fechado $E \supset A$ temos que $E \supset \overline{A}$.

1.3 Sequência no $\mathbb{R}^n$

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência do $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\forall k, (x_k) = (x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n)$ com $x_k^i \in \mathbb{R}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Notação: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$.

Definição 1.20. *$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|x_n\| \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$*

Exemplo 1.21.

1) Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a sequência definida por $x_k = (\frac{1}{k}, \sin(k))$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada.

$$\|x_k\|_\infty = max(\frac{1}{k}, \sin(k)) \leq 1(\text{ limitada pela } \|\cdot\|_\infty).$$

$$\|x_k\|_1 = |\frac{1}{k}| + |\sin(k)| \leq 2(\text{ limitada pela } \|\cdot\|_1)$$

Proposição 1.22. *Se $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$. é limitada para uma norma N_1 então ela é limitada por qualquer outra norma N_2.*

Demonstração. $N_1(x_n) \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Como N_1 é equivalentes a N_2, então $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $-cN_1(x_n) \leq N_2(x_n) \leq N_1(x_n) \leq cM$. □

Definição 1.23. *Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ Dizemos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente se existe algum $L \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tal que $\forall k > N$ então $\|x_k - L\| < \varepsilon$. Notação: $\lim_{n\to\infty} x_k = L$.*

Proposição 1.24. *A convergência no $\mathbb{R}^n$ não depende da norma.*

Demonstração. Exercício! □

Exemplo 1.25.

1) $x_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})$, x_k é convergente e $\lim_{n\to\infty} x_k = (0, 0)$.
Vamos usar a $\|\cdot\|_\infty$. Seja $\varepsilon > 0$ e $N = \lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor + 1$, $\forall k > N$.
$k > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{k} < \varepsilon \Rightarrow \|(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \|x_k - (0, 0)\|_\infty < \varepsilon$.

Definição 1.26. *Seja A um conjunto. Dizemos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de A se $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in A$. Notação $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A^{\mathbb{N}}$.*

Proposição 1.27. *Seja A um conjunto e $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A^{\mathbb{N}}$ Então, se $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} x_k = L$ então $L \in \overline{A}$.*

Demonstração. Seja $r > 0$, $B(L,r) \cap A \neq \emptyset$? Como $\lim_{n\to\infty} x_k = L$, existe N tal que $\forall k > N$, $\|x_k - L\| < r \Leftrightarrow x_k \in B(L,r)$. Como $x_k \in A$ temos que $B(L,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow L \in \overline{A}$. □

Proposição 1.28. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \cap (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$, $x_k = (x_k^1, ..., X_k^n)$ *e* $\lim_{k\to\infty} x_k = L = (L_1, ..., L_n) \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k^i = L_i$, $\forall i = 1, ..., n$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$
$\|x_k - L\|_\infty < \varepsilon \Leftrightarrow \max_i |x_k^i - L_i| < \varepsilon$.
$(\Leftarrow)$
$N = \max_i N_i |x_k^i - L| < \varepsilon \Rightarrow \|x_k - L\| < \varepsilon$. □

Proposição 1.29. *O conjunto A é fechado se, e somente se, toda sequência convergente de elementos de A tem um limite em A.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$
Temos pela proposição anterior que $L \in \overline{A} = A$.
$(\Leftarrow)$
$A = \overline{A}$? Vejamos: temos de imediato que $A \subset \overline{A}$. Alem disso, podemos perceber também que $\overline{A} \subset A$. De fato, se $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Tome uma sequencia tal que:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\in B(x,1) \cap A \\
x_2 &\in B(x,1/2) \cap A \\
&. \\
&. \\
&. \\
x_k &\in B(x,1/k) \cap A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_k \subset A^{\mathbb{N}} \text{ e } \lim_{k\to\infty} x_k &= x (\text{pois} \|x - x_k\| < \frac{1}{k}) \\
&\Rightarrow x \in A \Rightarrow \overline{A} \subset A \Rightarrow A \text{ é fechado.}
\end{aligned}
$$

□

Teorema 1.30 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada no $\mathbb{R}^n$ tem uma subquência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$, temos que $x_k = ({x_k}^1, ..., {x_k}^n)$. $({x_k}^1)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ limitada. Dessa forma, utilizando o Teorema de Bolzano-Weierstrass na reta, temos que $({x_k}^1)_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente.Desse modo, existe $N_1 \subseteq \mathbb{N}(\#N_1 = +\infty)$ tal que $({x_k}^1)_{k\in N_1}$ é convergente. A sequência $({x_k}^2)_{k\in N_1}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ limitada. Utilizando novamente o Teorema de Bolzano-Weierstrass na reta, temos que existe $N_2 \subseteq N_1(\#N_2 = +\infty)$ tal que $({x_k}^2)_{k\in N_2}$ é convergente. Fazendo isso n vezes, construímos um conjunto $N_n \subseteq \mathbb{N}$ com $\#N_n = +\infty$ e tal que $({x_k}^1)_{k\in N_n}$, $({x_k}^2)_{k\in N_n}$,...,$({x_k}^n)_{k\in N_n}$ são convergentes. Concluímos então que $(x_k)_{k\in N_n} = (({x_k}^1, ..., {x_k}^n))_{k\in N_n}$ é convergente. □

1.4 Conjuntos Compactos

Definição 1.31. *Sejam E um espaço vetorial, $X \subseteq E$ e $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ uma família de conjuntos de E. Dizemos que $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ é um recobrimento aberto de X se A_λ é aberto, $\forall\lambda \in I$ e $X \subseteq \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda$*

Definição 1.32. *Sejam E um espaço vetorial, $X \subseteq E$ e $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ um recobrimento aberto de E. Se existe $I_1 \subset I$ tal que $\#I_1 < +\infty$ e tal que $X \subseteq \bigcup_{\lambda\in I_1} A_\lambda$ então dizemos que $(A_\lambda)_{\lambda\in I_1}$ é um subrecobrimento finito de X.*

Definição 1.33. *Um conjunto K é compacto se para todo recobrimento aberto K existe um subrecobrimento finito.*

Exemplos 1.34. *Em $\mathbb{R}^2$*

- *x é compacto: Se $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ é um recobrimento aberto de x então existe pelo menos um $k \in I$ tal que $x \in A_\lambda$ então A_λ é um subrecobrimento finito.*

- *$\mathbb{R}^2$ não é compacto: Seja $A_\lambda = B(\lambda, 1), \lambda \in \mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2 \subset \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}^2} A_\lambda$. Suponha que existe I finito tal que $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ é um subrecobrimento finito de $\mathbb{R}^2$. Seja $x_0 \in I$ tal que $\|x_0\| = max_{x\in I}\|x\|$. Qualquer ponto z tal que $\|z\| \geq \|x_0\| + 2$ não pertence a algum A_λ com $\lambda \in I$.*

Teorema 1.35. *No $\mathbb{R}^n$, para $K \subseteq \mathbb{R}^n$ as propriedades seguintes são equivalentes:*

1. *K é compacto*

2. *K é fechado e limitado*

3. *Para toda sequência de elementos de K existe uma subsequência convergente com limite em K.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$: Exercício.
$2 \Rightarrow 3$:K é limitado, então, pelo Teorema 1.30, para toda sequência de elementos de K existe uma subsequência convergente. como K é fechado o limite pertence a K.
$3 \Rightarrow 1$: Exercício. □

Definição 1.36. *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que C é convexo se $\forall x, y \in C, \forall t \in [0,1]$,*

$$tx + (1-t)y \in C.$$

Exemplo 1.37.

- *$B(a,r)$ é convexo: Sejam $x, y \in B(a,r)$ e $t \in [0,1]$.*
  Afirmação: $tx + (1-t)y \in B(a,r)$
  De fato, $\|tx + (1-t)y - a\| = \|tx + (1-t)y - ta - (1-t)a\| \leq \|tx - ta\| + \|(1-t)y - (1-t)a\| = |t|\|x-a\| + |1-t|\|y-a\| < tr - (1-t)r = r$

- *$B(a,r)$ não é compacto: $B(a,r) \subseteq \bigcup_{s<r} B(a,s)$, mas se existisse I finito tal que $B(a,r) \subseteq \bigcup_{s \in I} B(a,s)$, teríamos que $B(a, s_{max}) \supset B(a,r)$ contradição, pois $B(a,r) \subseteq B(a, s_{max})$ e $s_{max} < r$.*

1.5 Limite de Funções de Várias Variáveis

Definição 1.38. *Sejam $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que f está definida ao redor de x_0 se*

- *x_0 é tal que $\exists V(x_0)$ tal que $V(x_0) \diagdown \{x_0\} \subset E$ ou*

- *x_0 é tal que $\exists V(x_0)$ tal que $V(x_0) \subset E \cup \{x_0\}$*

Definição 1.39. *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ seja definida ao redor de x_0 e $L \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que o limite de f quando x tende a .x_0 é igual a L se*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que se } \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\|_{\mathbb{R}^p} < \epsilon$$

Proposição 1.40. *O limite não depende da norma escolhida.*

Demonstração. Exercício. □

Proposição 1.41. *Se o limite existe ele é único.*

Demonstração. Exercício. □

Proposição 1.42. *Sejam $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $g : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ tais que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$. E sejam $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $\lim_{x \to x_0} (\alpha f + \gamma g)(x) = L_1 + L_2$

2. $\lim_{x \to x_0} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle L_1, L_2 \rangle$

3. $\exists K \subset E$ *tal que* $K \cup \{x_0\}$ *é uma vizinhança de* x_0 *e* f *é limitada em* K*.*

Demonstração. Exercício. $\square$

Proposição 1.43. *Sejam* $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *definida ao redor de* x_0*,* $L \in \mathbb{R}^p$ *e* $g : E \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *definida ao redor de* L*. Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_1$*, então* $\lim_{x \to x_0} f \circ g(x) = L_1$*.*

Proposição 1.44. *Seja* $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$*,* $f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x))$*.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = (L_1, L_2, ..., L_p) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f_1(x) = L_1, \lim_{x \to x_0} f_2(x) = L_2, ..., \lim_{x \to x_0} f_p(x) = L_p$$

Teorema 1.45. *Seja* $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *definida ao redor de* x_0*. Então* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *se, e somente se, para qualquer sequência* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *de elementos de* E *tal que* $\lim_{k \to +\infty} x_k = x_0$ *tivermos que* $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = L$*.*

Demonstração.
$\Rightarrow$ Exercício.
$\Leftarrow$ Temos que $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \to +\infty} x_k = x_0$, $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = L$.
Suponhamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$. Dessa forma,

$$\exists \epsilon{>}0 \quad \forall \delta{>}0 \ \exists x \|x - x_0\| {<} \delta \text{ e } \|f(x) - L\| {>} \epsilon$$

Considere $\delta_k = \frac{1}{k}$,

$$\forall k \ \exists x_k \text{ tal que } \|x_k - x_0\| {<} \tfrac{1}{k} \text{ e } \|f(x_k) - L\| {>} \epsilon$$

Isso implica que $\lim_{k \to +\infty} x_k = x_0$ e $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) \neq L$, contradição. $\square$

Exemplo 1.46.

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

O $\lim_{x \to (0,0)} f(x, y)$ *existe?*

Considere as sequências $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}^2$ tais que $u_k = (\frac{1}{k}, 0)$ e $v_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$. Temos que $\lim_{x \to +\infty} u_k = (0, 0)$ e $\lim_{x \to +\infty} v_k = (0, 0)$. No entanto, $\lim_{x \to +\infty} f(u_k) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(v_k) = \dfrac{1}{2}$. Portanto, o $\lim_{x \to (0,0)} f(x, y)$ não existe.

1.6 Continuidade

Definição 1.47. *Sejam $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma função e x_0 um ponto interior de E. Dizemos que f é contínua em x_0 se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ou seja, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que, $||x - x_0|| < \delta \Longrightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$.

Se f é contínua para todo ponto de E, dizemos que f é contínua.

Exemplo 1.48. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Não existe o limite da f no ponto (0,0) então, f não é contínua em (0,0).

Proposição 1.49. *Dada uma função f, temos f contínua em x_0 se, e somente se, para toda sequência $(X_k)_k$ de elementos de E tal que, $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = x_0$ temos $\lim\limits_{k \to \infty} f(X_k) = f(x_0)$.*

Prova análoga ao teorema de limites e sequências.

Proposição 1.50. *A soma, a composição, o produto por escalar de funções contínuas são contínuas.*

Demonstração. Provaremos apenas que a composição de funções contínuas é contínua. Sejam $x \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $f(X) \subset Y$ e $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Considere f contínua em $a \in X$ e g contínua em $b = f(a) \in Y$. Mostraremos que $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é continua em a. Como g é contínua, dado $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0$ tal que $||y - f(a)|| < \delta_1 \Longrightarrow ||g(y) - g(f(a))|| < \varepsilon$. Como f é contínua, dado $\varepsilon > 0$,$\exists \delta_2 > 0$ tal que, $x \in X$, $||x-a|| < \delta_2 \Longrightarrow ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$. Sabemos que $f(X) \subset Y$, logo $f(x) \in Y$. Concluímos que

$$||x - a|| < \delta_2 \Longrightarrow ||f(x) - f(a)|| < \delta_1 \Longrightarrow ||g(f(x)) - g(f(a))|| < \varepsilon.$$

Portanto, $g \circ f$ é contínua em a. $\square$

Definição 1.51. *Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Seja $a = (a_1, ..., a_n) \in E$. Para todo $i \in [1, ..., n]$, podemos definir a função $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ dada por $f_i(x) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$.*

Os f_i são chamados de funções parciais de f em a.

Proposição 1.52. *Se f é contínua em $a = (a_1, ..., a_n)$ então, f_i é contínua em a_i, $\forall i \in [1, ..., n]$.*

Demonstração. Seja $(U_k)_k \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $U_k \longrightarrow a_i$. Seja

$$(X_k)_k = ((a_1, a_2, ..., a_{i-1}, U_k, a_{i+1}, ..., a_n))_k \subset E^{\mathbb{N}},$$

logo, $X_k \longrightarrow a$. Pela continuidade da f em a, temos $f(X_k) \longrightarrow f(a)$. Mas, $f(X_k) = f(a_1, ..., a_{i-1}, U_K, a_{i+1}, .., a_n) = f_i(U_k)$ e $f(a) = f_i(a_i) \Longrightarrow f_i(U_k) \longrightarrow f_i(a_i)$. Logo, f_i é contínua em a_i. $\square$

Obs: A recíproca é falsa.

Exemplo 1.53. *Considere a função definida no Exemplo 1.48. Temos que as suas funções parciais são contínuas em* $(0,0)$*, mas* f *não é contínua em* $(0,0)$.

Teorema 1.54. *Seja* $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) f *é contínua em* E*;*

ii) Para todo aberto $A \subset \mathbb{R}^p$*,* $f^{-1}(A)$ *é aberto em* E*;*

iii) Para todo fechado $B \subset \mathbb{R}^p$*,* $f^{-1}(B)$ *é fechado em* E.

Demonstração. $(ii) \iff (iii)$

$\Rightarrow$) Seja $B \subset \mathbb{R}^p$ fechado $\Longrightarrow \mathbb{R}^p \backslash B$ é aberto $\Longrightarrow f^{-1}(\mathbb{R}^p \backslash B)$ é aberto, por hipótese. Daí, $f^{-1}(E \backslash A) = E \backslash f^{-1}(A)$ é fechado, logo, $f^{-1}(A)$ é aberto.

$\Leftarrow$) Seja $A \subset \mathbb{R}^p$ aberto$\Longrightarrow \mathbb{R}^p \backslash A$ é fechado$\Longrightarrow f^{-1}(\mathbb{R}^p \backslash A)$ é fechado, por hipótese. Disso, $f^{-1}(E \backslash A) = E \backslash f^{-1}(A)$ é fechado, portanto, $f^{-1}(A)$ é aberto.

$(i) \iff (ii)$

$\Leftarrow$) Sejam $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$, considere a bola aberta de centro em $f(x_0)$ e raio ε. Como isso, $f_{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ é aberta$\Longrightarrow x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \Longrightarrow \exists \delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. Se $y \in B(x_0, \delta) \Longrightarrow y \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \Longrightarrow f(y) \in B(f(x_0), \varepsilon) \Longrightarrow ||y - x_0|| < \delta \Longrightarrow ||f(y) - f(x_0)|| < \varepsilon \forall \varepsilon > 0$. Logo, f é contínua.

$\Rightarrow$) Sejam A aberto e $x_0 \in f^{-1}(A)$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \varepsilon) \subset A$. Pela continuidade da f, $\exists \delta > 0$ tal que $||x_0 - y|| < \delta \Longrightarrow ||f(y) - f(x_0)|| < \varepsilon \forall y \in E$. Com isso, $y \in B(x_0, \delta) \Longrightarrow f(y) \in B(f(x_0), \varepsilon) \subset A \Longrightarrow f(y) \in A \Longrightarrow y \in f^{-1}(A) \Longrightarrow B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(A)$. Logo, $f^{-1}(A)$ é aberto. $\square$

Proposição 1.55. *Seja* $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *contínua. Seja* $K \subset E$ *compacto então,* $f(K)$ *é compacto.*

Demonstração. Seja $(X_k)_k$ uma sequência de elementos de $f(K)$. Como $X_k \in f(K)$ para cada k, existe $U_k \in K$ tal que $f(U_k) = X_k$. Como $(U_k)_k$ é uma sequência de elementos de K (compacto) então, existe uma subsequência $(U_k)_{k \in \mathbb{N}_1}$ convergente a algum $a \in K$. Pela continuidade da f, $\lim_{k \to \infty} f(U_k) = f(a) \Longrightarrow X_k \longrightarrow f(a) \in f(K)$. Logo, $f(K)$ é compacto. $\square$

Proposição 1.56. *Seja $f : K \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ com K compacto. Se f é contínua então, existe $x_0 \in K$ e $x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \forall x \in K$.*

Demonstração. Sabemos que $f(K) \subset \mathbb{R}$ é compacto, pois f é contínua e K é compacto, ou seja, $f(K)$ é fechado e limitado. Com isso, para todo $x \in K$:

$$I = \inf_{z_0 \in K} f(z_0) = \inf_{y_0 \in f(K)} y_0 \leq f(x) \leq \sup_{y_1 \in f(K)} y_1 = \sup_{z_1 \in K} f(z_1) = S.$$

Assim I e S pertencem ao fecho de $f(K)$, mas $f(K)$ é fechado, logo, $I \in f(K)$ e $S \in f(K)$. Portanto, $\exists\ x_0 \in K$ tal que $I = f(x_0)$ e $\exists\ x_1 \in K$ tal que $f(x_1) = S$. $\square$

1.7 Continuidade Uniforme

Definição 1.57. *Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Dizemos que f é uniformemente contínua se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, para todo $(x, y) \in E \times E$ se:*

$$||x - y|| < \delta \Longrightarrow ||f(x) - f(y)|| < \varepsilon$$

Exemplo 1.58. *Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma função lipschitz, ou seja, existe $k > 0$ tal que $||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y||$ para todo $x, y \in E$. Então f é uniformemente contínua.*

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{k} \Longrightarrow ||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y|| < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$.

Teorema 1.59. *Seja $f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ com K compacto. Se f é contínua, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Suponha que f não seja uniformemente contínua. Assim, existe $\varepsilon > 0$ para todo $\delta > 0$, existe $(x, y) \in K \times K$ tais que $||x - y|| < \delta$ e $||f(x) - f(y)|| \geq \varepsilon$. Dessa forma, para cada $\delta = \frac{1}{k}$, existe $(X_k, Y_k) \in K \times K$ tais que $||X_k - Y_k|| < \frac{1}{k}$ e $||f(X_k) - f(Y_k)|| \geq \varepsilon$. Como $(X_k)_k \subset K$(compacto), então existe uma subsequência $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_1}$ convergente para um $x_0 \in K$. Pela continuidade da f, temos $f(X_k) \longrightarrow f(x_0)$ para $k \in \mathbb{N}_1$. Além disso, $Y_k \longrightarrow x_0$, pois $||Y_k - X_k|| = ||Y_k - X_k + X_k - X_0|| \leq ||Y_k - X_k|| + ||X_k - x_0|| < \varepsilon$. Logo, $f(Y_k) \longrightarrow f(x_0)$ uma contradição já que $||f(X_k) - f(Y_k)|| \geq \varepsilon$. Portanto, f é uniformemente contínua.

$\square$

1.8 Conjuntos Conexos

Definição 1.60. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que E é um conjunto desconexo se E é a união de dois abertos em E disjuntos e não-vazios.*

Observação 1.61. *Caso contrário, E é conexo (ou seja, E não pode ser escrito como a união de dosi abertos em E disjuntos não-vazios.*

Teorema 1.62. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

a) E é conexo;

b) E não pode ser escrito como união de dois fechados em E disjuntos não-vazios;

c) Os únicos conjuntos abertos e fechados em E são E e $\emptyset$;

d) Os únicos conjuntos A de E tal que $\overline{A} \backslash \mathring{A}$ são E e $\emptyset$;

e) E não pode ser escrito como a união de dois conjuntos separados ($A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$);

f) Para toda $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua, f é constante.

Demonstração. $a) \iff b)$ ou $\sim a) \iff \sim b)$

E não é conexo se, e somente se, $E = A \cup B$ com A e B disjuntos não vazios e abertos em E. Com isso, $C = E \backslash A$ e $D = E \backslash B$ são fechados, além disso, $C = B$ e $D = A$, portanto, $E = C \cup D$.

$b) \iff e)$ ou $\sim b) \iff \sim e)$

$\Rightarrow$) Suponha que $E = A \cup B$ com A e B disjuntos não vazios e fechados em E. Como A e B são fechados, temos que $A \cap \overline{B} = A \cap B = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = A \cap B = \emptyset$. Logo, $E = A \cup B$ tal que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

$\Leftarrow$) Suponha que $E = A \cup B$ com $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B \emptyset$. Seja $(X_n)_n \subset A$ convergente para $x_0 \in E$. Mostraremos que $x_0 \in A$. Se $x_0 \notin A$ temos que $x_0 \in B$, mas $x_0 \in \overline{A}$. Assim, $x_0 \in \overline{A} \cap B = \emptyset$. Logo, $x_0 \in A$, portanto, A é fechado em E. De forma análoga, vemos que B é fechado em E. Logo, $E = A \cup B$ com A e B fechados em E, disjuntos não vazios.

$\sim a) \iff \sim b)$

Suponha que E não é conexo, ou seja, $E = A \cup B$ com A e B disjunto não vazios e abertos. Considere $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \in A, \\ 1, & \text{se} \quad x \in B. \end{cases}$$

Note que f é contínua, pois A e B são abertos e disjuntos.

$\sim f) \iff \sim b)$

Suponha que exista $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua não constante. Considere $A = f^{-1}(0)$ e $B = f^{-1}(1)$. Pela continuidade da f, temos A e B conjuntos fechados disjuntos e $E = A \cup B$.

As outras implicações ficam a cargo do leitor. $\square$

Proposição 1.63. *A reunião $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ de uma família qualquer (finita ou infinita) de conjuntos conexos que tem um ponto x em comum ($x \in E_i$ para todo i) é conexa.*

Demonstração. Seja $E = A \cup B$ com A, B abertos em E e disjuntos. Seja $x \in E_i$ para todo i.

Suponha que $x \in A$. $E_i = (A \cap E_i) \cup (B \cap E_i)$. Como $x \in A \cap E_i$ e E_i é conexo, temos que $B \cap E_i = \emptyset$. Assim, $B = \bigcup_{i \in I} (B \cap E_i) = \emptyset$. Logo, E é conexo.

$\square$

Proposição 1.64. *Os únicos conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos.*

Demonstração. Seja $E \subset \mathbb{R}$ conexo tal que E não seja um intervalo. Então existem $a < b < c$ tais que $a \in E, c \in E$ e $b \notin E$.

Considere $A = \{x \in E; x < b\}$ e $B = \{x \in E; x > b\}$.

$E = A \cup B$. A e B são abertos em E, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, pois $a \in A$ e $B \neq \emptyset$, pois $c \in B$. O que é um absurdo, pois supomos E conexo. Logo, E é um intervalo.

$\square$

Proposição 1.65. *$E \subset \mathbb{R}^n$ conexo, $f : E \to \mathbb{R}^p$ contínua. Então $f(E)$ é conexo.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $f(E)$ não é conexo. Isto é, $f(E) = A \cup B$ com A e B abertos em $f(E)$, disjuntos e não-vazios.

$$f^{-1}(f(E)) = f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow E = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

Como por hipótese f é contínua, temos que $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos em E. Como A e B são não-vazios e $A \subset f(E), B \subset f(E)$, então $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ e $f^{-1}(B) \neq \emptyset$.

Note que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$, pois se existe $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, temos que $x \in f^{-1}(A)$ e $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in A$ e $f(x) \in B$. Contradizendo o fato de que $A \cap B = \emptyset$.

Logo, E é a união disjunta de dois conjuntos abertos e não-vazios. Absurdo, pois E é conexo.

Conclusão: $f(E)$ é conexo.

$\square$

Teorema 1.66. ***(Teorema do Valor intermediário)**: Sejam $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua e E conexo. Para todo $x, y \in E$ e para qualquer $c \in (f(x), f(y))$, existe $z \in E$ tal que $f(z) = c$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, $f(E)$ é conexo e pela definição da f, $f(E) \subset \mathbb{R}$. Assim, $f(E) = I$ é um intervalo.

Sejam $x, y \in E$. Com isso, $f(x) \in I$ e $f(y) \in I$, sendo assim, $(f(x), f(y)) \subset I$. Se $c \in (f(x), f(y)) \subset I = f(E)$, temos que $c \in f(E)$. Logo, existe $z \in E$ tal que $f(z) = c$.

$\square$

Definição 1.67. *Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, Γ é um caminho contínuo (arco contínuo) se existe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $\gamma(a,b) = \Gamma$.*

(γ é chamado de parametrização do caminho Γ (a parametrização não é única)).

Definição 1.68. *$E \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos (conexo por arcos) se $\forall\ x, y \in E$ existe um caminho contínuo em E que liga x a y. ($\exists\ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ e $\gamma([a,b]) \subset E$).*

Proposição 1.69. *Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos, então E é conexo.*

Demonstração. Seja $x \in E$, para cada $y \in E$, existe $\Gamma_y \subset E$ que liga x a y, pois por hipótese E é conexo por caminhos. Assim, $E = \bigcup\limits_{y \in E} \Gamma_y$, pois $y \in \Gamma_y$.

Temos também que Γ_y é conexo, pois é a imagem de um conexo (intervalo) por uma aplicação contínua. $x \in \Gamma_y\ \forall\ y$.

Logo, E é conexo, pois é a união de conexos com um ponto em comum.

□

Questão 1.70. *Encontre um conjunto conexo que não é conexo por caminhos.*

Demonstração. Considere $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0$ e $y = \cos(\frac{1}{x})\}$ o gráfico da função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ e $f(0) = 0$.

$E = X \cup \{(0,0)\}$ é conexo, pois $X \cap \overline{\{(0,0)\}} = \emptyset$, mas $\overline{X} \cap \{(0,0)\} = (0,0) \neq \emptyset$.

Mas, E não é conexo por caminhos, pois o único caminho possível que liga $(0,0)$ a $(\frac{2}{\pi}, 0)$ tal que $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(\frac{2}{\pi}) = (\frac{2}{\pi}, 0)$ é dado pela aplicação $\gamma : [0, \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\gamma(x) = \begin{cases} (x, \cos(\frac{1}{x})) & \text{se} \quad x > 0 \\ (0,0) & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mas, γ não é contínua, pois $\lim\limits_{x \to 0} \gamma(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x, \cos(\dfrac{1}{x})) \neq \gamma(0)$.

□

Proposição 1.71. *$E \subset \mathbb{R}^n$ aberto é conexo se, e somente se, E é conexo por caminhos.*

Demonstração. $\Leftarrow$) Já foi provado na proposição anterior.

$\Rightarrow$) Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo. Fixado $a \in E$.

Dado $x \in E$, denotemos $[a,x] :=$ caminho que liga x a a. Considere o conjunto $U = \{x \in E; [a,x] \subset E\}$.

Note que U é aberto, pois dado $x \in U$, temos que $\exists\ r > 0$ tal que $B(x,r) \subset E$, pois E é aberto. Como $B(x,r)$ é convexa, então para todo $y \in B(x,r)$ temos que $[x,y] \subset B(x,r) \subset E$. Daí, por justaposição, $[y,a] \subset E$ para todo $y \in B(x,r)$. Logo, $B(x,r) \subset U$.

Note também que $V = E \backslash U$ é aberto, pois se $v \in V$, $[v,a] \not\subset E$. Tomando $r_1 > 0$ tal que $B(v,r_1) \subset E$, temos que dado $z \in B(v,r_1), [v,z] \subset B(v,r_1) \subset E$, mas se $[z,a] \subset E$, teríamos, por justaposição, $[v,a] \subset E$. Absurdo.

Dessa forma, $E = V \cup U$ com V e U abertos em E e disjuntos. Como E é conexo e $a \in U$, segue que $V = \emptyset$. Logo, $E = U$ e portanto, E é conexo por caminhos.

□

Exemplo 1.72. *Um conjunto convexo é conexo por caminhos.*

Definição 1.73. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Seja $x \in E$. A componente conexa de x em E (C_x) é a união de todos os subconjuntos conexos de E que contém x.*

Exemplo 1.74. $E \subset \mathbb{R}, x \in E$

$E = \mathbb{R}, \qquad C_x = \mathbb{R}$

$E = \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad C_x =]-\infty, 0[, \quad se \quad x < 0$ *e* $C_x =]0, +\infty[, \quad se \quad x > 0$

$E = \mathbb{Q}, \qquad C_x = x.$

Proposição 1.75. *C_x é o maior conexo que contém x.*

Demonstração. De fato, se C é conexo e $x \in C$ então C é um dos conjuntos cuja união é C_x. Logo, $C \subset C_x$. Se C é conexo e $C \cap C_x \neq \emptyset$ então $C \cup C_x$ é conexo e assim, $C \cup C_x \subset C_x$. Logo, $C \subset C_x$.

□

2 Funções Reais de n Variáveis

2.1 Derivadas Parciais

Definição 2.1. *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : E \to \mathbb{R}$ e $a = (a_1, ..., a_n) \in E$. A derivada parcial de f em relação a x_i no ponto a $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)$ é a derivada de f_i no ponto a_i, ou seja,*

$$\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_i'(a_i) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+h}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}$$

$$= \lim_{x \to a_i} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{x - a_i}$$

Exemplo 2.2. $f(x,y) = \ln(x+y)$

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \tfrac{1}{x+y} \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \tfrac{1}{x+y}.$$

2.2 O Teorema de Schwarz

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ um função que possui as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ em todo ponto a do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. A `j-ésima` derivada parcial da função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ no ponto $a \in U$ será indicada por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Em geral, a existência das derivadas parciais de segunda ordem em todos os pontos onde f está definida não garante que se tenha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Exemplo 2.3. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Para todo $y \neq 0$ tem-se $f(0,y) = 0 = f(0,0)$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \frac{-y^3}{y^2} = -y \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right) = -1.$$

De forma análoga, verifica-se que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$. Portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Definição 2.4. *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui as* **n** *derivadas parciais em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

se estas funções forem contínuas em U, diremos que f é uma função de classe C^1. Se as derivadas parciais de segunda ordem existirem e forem contínuas, diremos que f é de classe C^2.

Lema 2.5. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto arbitrário e $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Fixemos $x_0 \in X$. Se $f : X \times K \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é contínua então, para todo $\varepsilon > 0$ dado pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $||x - x_0|| < \delta$ implicam $||f(x,t) - f(x_0,t)|| < \varepsilon$ para todo $t \in K$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que o resultado é falso. Assim, tomando $\delta_k = \frac{1}{k}$, existem $\varepsilon > 0$ e sequências de elementos $(X_k)_K \subset X$ e $(T_k)_k \subset K$ tais que $||X_k - x_0|| < \frac{1}{k}$ e $||f(X_k, T_k) - f(x_0, T_k)|| \geq \varepsilon$. Como K é compacto, $(T_k)_k$ admite um subsequência $(T_k)_{k \in \mathbb{N}_1}$ convergente a algum $t_0 \in K$, ou seja, $T_k \longrightarrow t_0$ para $k \in \mathbb{N}_1$. Assim, $(X_k, T_k) \longrightarrow (x_0, t_0)$ para $k \in \mathbb{N}_1$.

Pela continuidade da f, temos $f(X_k, T_k) \longrightarrow f(x_0, t_0)$, portanto, $\varepsilon \leq \lim ||f(X_k, T_k) - f(x_0, T_k)|| = ||f(x_0, t_0) - f(x_0, t_0)|| = 0$. Absurdo, pois $\varepsilon > 0$. □

Teorema 2.6. ***(Derivação sob o sinal de integração)****: Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, seja $f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que a i-ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$ existe para todo ponto $(x, t) \in U \times [a, b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$, assim definida, é contínua. Então a função $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)dt$, possui a i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt$.*

Resumindo: Pode-se derivar sob o sinal da integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

Demonstração. Queremos mostrar que existe

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \lim_{s \to 0} \frac{\varphi(x + se_i) - \varphi(x)}{s} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt.$$

Ou seja, mostremos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$|s| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\varphi(x + se_i) - \varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt \right| < \varepsilon.$$

Como U é aberto, dado $x \in U$, existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $s \in \mathbb{R}$ com $|s| < \delta_0$ temos que $[x, x + sei] \subset U$.
Note que

$$\frac{\varphi(x + se_i) - \varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt = \int_a^b \left[\frac{f(x + se_i, t) - f(x, t)}{s} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \right] dt. \qquad (2)$$

Pelo teorema do valor médio na reta, temos que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{f(x + se_i, t) - f(x, t)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta se_i, t).$$

Assim, a igualdade (2) se resume a

$$\int_a^b \left[\frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s} - \frac{\partial f}{\partial dx_i}(x,t)\right] dt = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, temos pelo Lema 2.5 que, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $0 < \delta < \delta_0$ tal que

$$|s| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| < \frac{\epsilon}{(b-a)},$$

para todo $t \in [a,b]$. Logo,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt\right| &= \left|\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt\right| \\ &\leq \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(x)$ possui a i-ésima derivada parcial dada por $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt.$

□

Teorema 2.7. ***(Schwarz)****: Se $f : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ então, para quaisquer $i, j = 1, ..., n$ e $x \in U$ tem-se*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos supor que $U = I \times J$ é um retângulo em $\mathbb{R}^2$.
Como f é C^2, $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ existe e é contínua, e portanto integrável.
Assim, fixado $b \in J$, para todo $(x,y) \in U$, pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$f(x,y) = f(x,b) + \int_b^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dt.$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : U \to \mathbb{R}$ é contínua, pois f é C^2, pelo teorema anterior, podemos derivar sob o sinal da integral e obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x}(\int_b^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dt) = \int_b^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,t)dt.$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,b) + \int_b^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,t)dt.$$

Derivando com relação a y, notemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,b) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}(\int_b^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,t)dt) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y),$$

pelo T.F.C. Portanto, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

□

2.3 Derivadas direcionais

Definição 2.8. *$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, U$ aberto. Sejam $x_0 \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$. A derivada direcional de uma função f no ponto x_0 e na direção de v é definida por*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

quando esse limite existe.

Observação 2.9. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0)$, *com e_i o i-ésimo elemento da base canônica.*

2.4 Diferenciabilidade

Definição 2.10. *$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com U aberto. Seja $x_0 \in U$. Dizemos que f é diferenciável em x_0 se existe uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} = 0.$$

Outra maneira de escrever: existe uma função $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (resto) tal que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = L(h) + r(h) \text{ e } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\parallel h \parallel} = 0.$$

Notação: $L = Df(x_0) = Df_{x_0} = df(x_0) = df_{x_0}$

df_{x_0} é chamada de diferencial de f no ponto x_0.

Cuidado: $df_{x_0} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

f é diferenciável se f for diferenciável para todo ponto de U.

A diferencial da função f é

$$\begin{aligned} df : U &\longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ x_0 &\longmapsto df_{x_0} \end{aligned}$$

Exemplo 2.11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável.*
Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $df_{x_0} \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sabemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0).h}{h} = 0$$

$\Rightarrow df_{x_0} = f'(x_0).h.$

Cuidado: $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ni df_{x_0} \neq f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} df_{x_0} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto f'(x_0).h. \end{aligned}$$

Exemplo 2.12. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciável.*
Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $df_{x_0} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - df_{x_0}.h}{\| h \|} = 0.$$

Fazendo $h = te_i$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i) - f(x_0) - df_{x_0}.te_i}{\| te_i \|} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i) - f(x_0) - tdf_{x_0}.e_i}{|t|} = 0$$

Sabemos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial dx_i}(x_0).$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).t}{t}=0.$$

Portanto, $df_{x_0}(e_i)=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$

Mas, note que

$h=(h_1,...,h_n)=h_1.e_1+h_2.e_2+...+h_n.e_n.$

Assim,

$$\begin{aligned} df_{x_0}(h) &= df_{x_0}(h_1,h_2,...,h_n)\\ &= h_1 df_{x_0}(e_i)+h_2 df_{x_0}(e_2)+...+h_n df_{x_0}(e_n)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0).h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0).h_n\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).h_1\\ &= \nabla f(x_0).h \end{aligned}$$

(gradiente de f em x_0)

$$\nabla f(x_0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\end{bmatrix} = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),...,\tfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right).$$

Logo, a diferencial de f em x_0 é dada por

$$\begin{aligned} df_{x_0}:\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}\\ h &\longmapsto \nabla f(x_0).h. \end{aligned}$$

Proposição 2.13. *Se df existe, então ela é única.*

Demonstração. De fato, suponha que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é diferenciável e $df_1(x_0)$ e $df_2(x_0)$ são as diferenciais de f em x_0. Daí, dado $h\in\mathbb{R}^n, h\neq 0$ e $t\in\mathbb{R}$, suficientemente pequeno, temos que

$$f(x_0+th)-f(x_0)=df_1(x_0)(th)+r_1(th), \qquad \text{com} \quad \lim_{th\to 0}\frac{r_1(th)}{||th||}=0$$
e
$$f(x_0+th)-f(x_0)=df_2(x_0)(th)+r_2(th), \qquad \text{com} \quad \lim_{th\to 0}\frac{r_2(th)}{||th||}=0$$

$$\Rightarrow df_1(x_0)(th)+r_1(th)=df_2(x_0)(th)+r_2(th)$$

$$\Rightarrow ||df_1(x_0)(th)-df_2(x_0)(th)||=||r_2(th)-r_1(th)||.$$

Como $df_1(x_0)$ e $df_2(x_0)$ são lineares e como $||th||=|t|||h||$, segue que

$$\begin{aligned}||df_1(x_0)(h)-df_2(x_0)(h)|| &= ||r_1(th)+r_2(th)||.\frac{1}{|t|}.\frac{||th||}{||th||}\\ &= \frac{||r_1(th)+r_2(th)||}{||th||}.||h||.\end{aligned}$$

Fazendo $t\to 0$, temos que $||th||\to 0$. Logo

$$||df_1(x_0)(h)-df_2(x_0)(h)||=\left|\left|\frac{r_1(th)}{||th||}+\frac{r_2(th)}{||th||}\right|\right|.||h||\longrightarrow 0$$

Logo, $df_1(x_0)(h)=df_2(x_0)(h)$.

Como $h\neq 0$ é arbitrário, segue que $df_1(x_0)=df_2(x_0)$.

$\square$

Exemplo 2.14. *$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ diferenciável. Seja $x_0\in\mathbb{R}^n$.*

$$df_{x_0}\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \qquad f(x_0)=(f_1(x_0),...,f_m(x0))$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-df_{x_0}.h}{||h||}=0_{\mathbb{R}^m}.$$

Primeiro encontremos $df_{x_0}(e_i)=(g_1(e_i),...,g_m(e_i)$.

Fazendo $h=te_i$, $\quad t\in\mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_j(x_0+te_i)-f_j(x_0)-g_j(te_i)}{||te_i||}=\lim_{t\to 0}\frac{f_j(x_0+te_i)-f_j(x_0)-t.g_j(e_i)}{|t|}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{f_j(x_0+te_i)-f_j(x_0)-\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0.t)}{t}=0 \quad\Rightarrow\quad g_j(e_i)=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0).$$

Assim, $\qquad df_{x_0}(e_i)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0),\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x_0),\dots,\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0)\right).$

Logo,

$$
\begin{aligned}
df_{x_0}(h) &= df_{x_0}(e_1).h_1 + df_{x_0}(e_2).h_2 + \ldots + df_{x_0}(e_n).h_n \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0).h_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0).h_i \right) \\
&= J_{f(x_0)}.h.
\end{aligned}
$$

Definição 2.15. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável. O jacobiano da função f no ponto x_0 é $J_{f(x_0)} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.*

$$
J_{f(x_0)} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0)
\end{bmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
df_{x_0} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\
h &\longmapsto J_{f(x_0)}.h
\end{aligned}
$$

Cuidado: f diferenciável $\quad \Rightarrow \quad$ f tem derivadas parciais
$$\not\Leftarrow$$

Proposição 2.16. *Se f é diferenciável em x_0 então f é contínua em x_0.*

Demonstração. Mostremos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

De fato, como f é diferenciável, temos que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}{||h||} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) - L(h) = 0.$

Como L é contínua, pois $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $L(0) = 0$, temos que $\lim\limits_{h\to 0} L(h) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0).$$

Logo, f é contínua em x_0.

$\square$

Definição 2.17. *$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 se as derivadas parciais existem e são contínuas.*

Teorema 2.18. *$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com U aberto. Se f é de classe C^1 então f é diferenciável.*

Demonstração. : Caso $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Queremos mostrar que f é diferenciável em (x_0, y_0). Para isso, é suficiente mostrar que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0. \quad (3)$$

Como as derivadas parciais existem, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_0+h_1,y_0) - f(x_0,y_0)}{h_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h_1\to 0} \overbrace{\frac{f(x_0+h_1,y_0) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).h_1}{h_1}}^{I} = 0.$$

Note que

$$(3) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2) - f(x_0+h_1,y_0) + f(x_0+h_1,y_0) - f(x_0,y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$+ \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2) - f(x_0+h_1,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$+ \overbrace{\frac{f(x_0+h_1,y_0) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}^{II}$$

Agora, observe que $II \to 0$, quando $(h_1,h_2) \to (0,0)$, pois $\sqrt{h_1^2+h_2^2} > |h_1| \Rightarrow II < I$.
Temos também que

$$\begin{aligned} g : [y_0, y_0+h_2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(t) = f(x_0+h_1, t) \end{aligned}$$

é derivável. Então, pelo teorema do valor médio, $\exists\, \theta \in (0,1)$ tal que

$$g(y_0+h_2) - g(y_0) = g'(y_0+\theta.h_2).h_2$$

$$\Rightarrow f(x_0+h_1,y_0+h_2) - f(x_0+h_1,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1, y_0+\theta h_2).h_2.$$

Logo,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0+h_1,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1,y_0+\theta h_2)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)}^{III}.\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

pois, como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua, $\Rightarrow III \to 0$ quando $(h_1,h_2)\to(0,0)$ e temos também que $\dfrac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ é limitado.

□

Proposição 2.19. *Se f e g são diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $d(f+g)_{x_0} = df_{x_0}+dg_{x_0}$.*

Se f é diferenciável então λf é diferenciável para $\lambda\in\mathbb{R}$ e $d(\lambda f)_{x_0} = \lambda df_{x_0}$.

Demonstração. Mostremos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)-(df_{x_0}+dg_{x_0}).h}{||h||} = 0. \tag{4}$$

De fato,

$$\begin{aligned}(f+g)(x_0+h) &= f(x_0+h)+g(x_0+h)\\ &= f(x_0)+df_{x_0}.h+r_1(h)+g(x_0)+dg_{x_0}.h+r_2(h)\\ &= (f+g)(x_0)+(df_{x_0}+dg_{x_0}).h+r_1(h)+r_2(h)\end{aligned}$$

com $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{r_1(h)}{||h||}=0$ e $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{r_2(h)}{||h||}=0$ pois, f e g são diferenciáveis em x_0.
Logo,

$$\begin{aligned}(4) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0)+(df_{x_0}+dg_{x_0}).h+r_1(h)+r_2(h)-(f+g)(x_0)-(df_{x_0}+dg_{x_0}).h}{||h||}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{r_1(h)+r_2(h)}{||h||}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $f+g$ é diferenciável em x_0 e $d(f+g)_{x_0} = df_{x_0}+dg_{x_0}$.
De forma análoga verifica-se que λf é diferenciável e $d(\lambda f)_{x_0} = \lambda df_{x_0}$.

□

2.5 Fórmula de Taylor

Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ k-vezes diferenciável em x_0. Então,

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + dF_{x_0}(h) + \frac{1}{2}d^2F_{x_0}(h,h) + ... + \frac{1}{k!}(h,...,h) + r(h)$$

tal que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|^k} = 0$.

Notação: $\frac{r(h)}{\|h\|^k} = \circ(\|h\|^k)$.

Teorema 2.20. *(Teorema de Taylon no $\mathbb{R}$) Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ k-vezes diferenciável em x_0. Então,*

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + F^{'}(x_0)(h) + \frac{1}{2}F^{''}(x_0)h^2 + ... + \frac{1}{k!}F^{(k)}(x_0)h^k + r(h).$$

Exemplo 2.21. *Seja $F(x) = senx$ com F uma função C^∞*

Taylor em 0:
$F^{'}(x) = cosx \quad F^{'}(0) = 1$
$F^{''}(x) = -senx \quad F^{''}(0) = 0$
$F^{(3)}(x) = -cosx \quad F^{(3)}(0) = -1$
$F^{(4)}(x) = senx \quad F^{(4)}(0) = 0$

Seja $h \in \mathbb{R}$.
$F(h) = 0 + h - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{5!}h^5 + \circ(h^6)$

$sen(h) = h - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{5!}h^5 + \circ(h^6)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + r(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \frac{r(x)}{x} = 1$$

2.5.1 Multi-Índice

Seja $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ com cada $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Definimos como $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ (ordem ou grau de α) e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$. Para $x \in \mathbb{R}$ temos $x^\alpha := (x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$; onde x^α é um número natural.

Além disso, temos que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2...\partial^{\alpha_n}x_n}$$

Teorema 2.22. *(Teorema de Taylor) Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ k-vezes diferenciável em x_0. Então,*

$$F(x_o + h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha F}{\alpha!}(x_0).h^\alpha + \circ(\|h\|^k)$$

ou

$$F(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha F}{\alpha!}(x_0)(x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} R_\alpha(x)(x - x_0)^\alpha \ \textit{com} \lim_{x \to x_0} R_\alpha(x) = 0.$$

Lema 2.23. *Se* $dF_{a+h}(\cdot) = \sum_{k=0}^{n} c_k + \circ(\|h\|^n)$ *com* $c_k : E^{k+1} \to F$ *aplicações multilineares contínua simétrica então:*

$$F(a + h) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} c_k(h^{k+1}) + \circ(\|h\|^{n+1}).$$

Demonstração. Queremos provar que $R(h) = F(a + h) - F(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} c_k(h^{k+1})$.
Para isso temos que verificar que,

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|^{k+1}} = 0 \quad \text{e} \quad dR_h(\cdot) = dF_{a+h}(\cdot) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} c_k(h^{k+1}) = \circ(\|h\|^n);$$

com $\lim_{h \to 0} \frac{dR_h(\cdot)}{\|h\|^n} = 0$. Então, $\forall \epsilon \ \exists \delta$ tal que $\|h\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{dR_h}{\|h\|^n} \right\| < \epsilon$.

Pelo Teorema do valor médio temos

$$\|R(h) - R(0)\| \leq k \|h - 0\| \Rightarrow \|R(h)\| \leq \|h\| = \epsilon \|h\|^{n+1} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|^{n+1}} = 0.$$

Vamos mostrar que agora que $dR_h(\cdot) = dF_{a+h}(\cdot) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} c_k(h^k, \cdot)$.

$$\frac{R(h + l) - R(h) - dF_{a+h}(l) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} c_k(h^k, l)}{\|l\|} =$$

$$= (F(a + h + l) - F(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} c_k(h, l)^{k+1} - F(a + h) + F(a) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} c_k(h^{k+1}) - dF_{a+h}(l) + \sum_{k=0}^{n} c_k(h^k, l)).\frac{1}{\|l\|}.$$

Por definição da dF_{a+h} temos que $\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|l\|} = 0$. Daí

$$\frac{1}{\|l\|}(c_k(h^k, l) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} c_k(h^{k+1})) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} c_k(h, l)^{k+1}.$$

Para $k = 0$ temos:

$$\frac{1}{\|l\|}(C_0(l) + C_0(h) - C_0(h+l)) = \frac{1}{\|l\|}(C_0(l) + C_0(h) - C_0(h) - C_0(l)) = 0$$

Para $k = 1$ temos:

$$\frac{1}{\|l\|}(C_1(h,l)+\frac{1}{2}C_1(h,h)-\frac{1}{2}C_1(h+l,h+l)) = \frac{1}{\|l\|}(C_1(h,l)+\frac{1}{2}C_1(h,h)-\frac{1}{2}(C_1(h,h)+$$

$$+C_1(h,l) + C_1(l,h) + C_1(l,l)) = -\frac{1}{2}\frac{C_1(l,l)}{\|l\|} = -\frac{1}{2}C_1(\frac{1}{\|l\|^{1/2}}, \frac{1}{\|l\|^{1/2}}) = 0.$$

Pois, temos C contínua e bilinear, então $\lim_{h\to 0} \frac{l}{\|l\|^{1/2}} = 0$.

$\square$

Prova do Teorema de Taylor

Demonstração. A prova será feita por indução. Para $k = 0$ temos a definição da continuidade. Para $k = 1$ temos a definição da diferenciabilidade.

Vamos supor que o teorema vale para k e provaremos que vale para $k+1$. F é $k+1$-vezes diferenciável, então dF é k-vezes diferenciável, então podemos usar o teorema de Taylor até K para dF. Ou seja,

$$dF_{a+h}(\cdot) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} d^{n+1}F_a(h^n, \cdot) + \circ(\|h\|^k).$$

Pelo Lema anterior:

$$F(a+h) = F(a)+\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n+1}.\frac{1}{n!}d^{n+1}F_a(h^{n+1})+\circ(\|h\|^{k+1}) = F(a)+\sum_{n=1}^{k+1}\frac{1}{n!}d^n(F_a(h^n))+$$

$$+\circ(\|h\|^{k+1}).$$

Isso é Taylor de ordem $k+1$.

$c_n = \frac{1}{n!}F_c(\cdot)$ são multilineares pela definição da diferenciável são contínua (pois F é c^{k+1}) simetrica. $\square$

3 Funções Implícitas

Teorema 3.1 (regra da cadeia)**.** *Sejam $U \subseteq R$ e $V \subseteq R$ abertos, $f : U \to V$ contínua função tal que $f_1, ..., f_n$ são suas funções coordenadas as quais possuem derivadas parciais* *em $a \in U$, e $g : V \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $b = f(a)$. Então, $g \circ F : U \to R$ possui derivadas parcias em a e vale:*

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b).\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

Além disso, se f, g forem C^1, então $g \circ f$ é C^1.

Demonstração. $g \circ f(a + te_i) - g \circ f(a) = g[f(a + te_i) - g(f(a))] = dg_b(f(a + te_i) - f(a)) + r(f(a + te_i) - f(a))$ $\dfrac{g \circ f(a + te_i) - g \circ f(a)}{|t|} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b).\frac{f_j(a + te_i) - f_j(a)}{|t|} + \dfrac{r(f(a + te_i) - f(a))}{|t|}$ e $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{r(f(a + te_i) - f(a))}{t}$. Portanto,

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b).\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

□

Teorema 3.2 (Valor Médio)**.** *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável. Se o intervalo $[a, b] \subset U$, então existe $c \in (a, b)$tal que*

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c).(b - a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i)$$

Demonstração. Consideremos o caminho contínuo

$$\begin{array}{rcl} \lambda : [0,1] & \to & [a,b] \subset U \\ t & \mapsto & (1-t)a + tb \end{array}$$

Seja $f \circ \lambda \to \mathbb{R}$ pela regra da cadeia temos que $(f \circ \lambda \to \mathbb{R})'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda(t)).(\lambda_i'(t))$. Pelo teorema do valor médio na reta, existe $s \in (0, 1)$ tais que

$$\begin{aligned} f \circ \lambda(1) - f \circ \lambda(0) &= \Delta f(c).(b - a) \\ f(b) - f(a) &= \sum_{i-1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\lambda(s).\lambda_i' s \end{aligned}$$

Pela construção da λ temos que $\lambda'(t) = b - a$. Daí,

$$f(b) - f(a) = \sum_{i-1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\lambda(s).(b - a)$$

Temos que λ é bijeção, como $s \in (0, 1)$, então $\lambda(s) \in (a, b)$. Logo, chamando $\lambda(s) = c$ segue o resultado.

□

Já vimos a Regra da cadeia e o Teorema do valor médio, que serão usados durante a prova do Teorema da Função Implícita.

Seja

$$\begin{aligned} F : U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y), \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Dado $c \in \mathbb{R}^m$, temos que para cada x, pode existir um ou mais valores de y (ou pode não existir) satisfazendo a equação $F(x, y) = c$. Se existe uma vizinhança aberta $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 tal que para cada $x \in W$ existe exatamente um y satisfazendo a equação, então dizemos que $F(x, y) = c$ define y como uma função de x implicitamente sobre W.

Um teorema de função implícita é um teorema que determina em que condições uma relação como $F(x, y) = c$ define y como função de x ou x como função de y (a solução é local). Apresentaremos a prova do seguinte Teorema da Função Implícita.

Teorema 3.3. *Sejam* $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto F(x, t)$, *de classe* $C^k (k \geqslant 1)$, U *aberto, e* $(a, b) \in U$ *tal que* $F(a, b) = c$ *e* $\frac{\partial F}{\partial t}(a, b) \neq 0$. *Então existem um aberto* $W \subseteq \mathbb{R}^n$ *com* $a \in W$, *e um aberto* $I \subseteq \mathbb{R}$ *com* $b \in I$, *satisfazendo:*

- *Para cada* $x \in W$, *existe um único* $t \in I$ *tal que* $F(x, t) = c$. *Daí, podemos definir a função*

$$\begin{aligned} f : W &\longrightarrow I \\ x &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

em que $F(x, f(x)) = c$.

- f *é de classe* C^k, $\frac{\partial F}{\partial t}(x, f(x)) \neq 0$ *para todo* $x \in W$, *e*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial t}(x, f(x))},$$

para todo $x \in W$ *e* $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Dividiremos essa demonstração em 3 partes, a existência da f, a sua continuidade e diferenciabilidade.

- Existência dos abertos e da função f: Suporemos sem perda de generalidade que $\frac{\partial F}{\partial t}(a, b) > 0$.

Por continuidade de $\dfrac{\partial F}{\partial t}$, existe um paralelepípedo fechado não degenerado do tipo $W_1 \times [b_1, b_2]$ centrado em (a, b) e contido em U, com arestas paralelas aos eixos coordenados tal que $\dfrac{\partial F}{\partial t} > 0$ sobre $W_1 \times [b_1, b_2]$.

A função

$$\begin{aligned} F(a,\cdot) : [b_1, b_2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \quad &\longmapsto F(a,t), \end{aligned}$$

é estritamente crescente, visto que sua derivada é estritamente positiva. Como $F(a, b) = c$, então $F(a, b_1) < c$ e $F(a, b_2) > c$.

Como F é contínua, existe um paralelepípedo aberto $W \subseteq W_1$ centrado em a com arestas paralelas aos eixos coordenados tal que $F(x, b_1) < c$ e $F(x, b_2) > c$, para todo $x \in W$.

Dado $x \in W$ fixado, temos que a função

$$\begin{aligned} F(x,\cdot) \ : [b_1, b_2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \quad &\longmapsto F(x,t), \end{aligned}$$

é estritamente crescente e $F(x, b_2) > c$. Como $F(x, b_1) < c$, existe um único $t \in (b_1, b_2)$ tal que $F(x, t) = c$ (existe pelo Teorema do valor intermediário e é único pela função ser estritamente crescente). Daí, temos os abertos W e $I = (b_1, b_2)$, e a consequente existência da função f.

- **Continuidade**

  Consideremos $F : \omega \to [b_1, b_2]$

  Seja $V \subseteq [b_1, b_2]$ fechado, como V é limitado, então V é compacto. Queremos mostrar que $F^{-1}(V)$ é fechado.

  Seja $(x_k)_{k \in N}$ uma sequência convergente com elementos em $F_{-1}(V) \subset W$ tal que $lim X_k = x \in W$. Temos que $F(x_k) \in V$, como V é compacto, então existe uma subsequencia $F(x_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$ convergente com limite $s \in V$, $i.e$, $lim F(x_{k'}) = s$. Daí, o $lim F(x_{k'}, F(x_{k'})) = F(x, s)$, por outro, $lim F(x_{k'}, F(x_{k'})) = c$. Segue-se que para x existe $s \in [b_1, b_2]$ tal que $F(x, s) = c$, como $s \neq b_1$ e $s \neq b_2$, então $s \in I$. Pela unicidade da $F(x)$, temos que $F(x) = s \in V$. Logo, $x \in F^{-1}(V)$.

- Agora, finalizaremos a prova do teorema, mostrando a diferenciabilidade da f e a fórmula para o cálculo de suas derivadas parciais.

  Dado $x \in W$, seja e_j o j-ésimo vetor canônico (da base canônica) de $\mathbb{R}^n$ e $s \neq 0$ suficientemente pequeno tal que $x + se_j \in W$. Para $P = (x, f(x))$, $Q = (x +$

$se_j, f(x+se_j)) \in U$, temos que $F(P) = F(Q) = c$. Pelo Teorema do valor médio, existe $(\overline{x}, \overline{t})$ no segmento de reta $[P, Q] \subseteq W \times I$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= F(x+se_j, f(x+se_j)) - F(x, f(x)) \\ &= \langle \nabla F(\overline{x}, \overline{t}), (x+se_j - x, f(x+se_j) - f(x)) \rangle \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{t}) \cdot s + \frac{\partial F}{\partial t}(\overline{x}, \overline{t}) \cdot (f(x+se_j) - f(x)). \end{aligned}$$

Assim, como $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t) \neq 0$ para todo $(x,t) \in W \times I$, então

$$\frac{f(x+se_j) - f(x)}{s} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{t})}{\frac{\partial F}{\partial t}(\overline{x}, \overline{t})}.$$

Pela continuidade de $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}, \dfrac{\partial F}{\partial t}$ e f, temos que se $s \to 0$ então

$$\frac{f(x+se_j) - f(x)}{s} \longrightarrow -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial t}(x, f(x))}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial t}(x, f(x))}.$$

Agora, como $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}, \dfrac{\partial F}{\partial t}$ e f são C^{k-1}, temos que as $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ são C^{k-1}, de onde segue que f é C^k.

□

4 Teorema da Aplicação Inversa

Definição 4.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ Uma bijeção contínua $f : U \longrightarrow V$, cuja inversa $g = f^{-1} : V \longrightarrow U$ também é contínua é chamada de homeomorfismo.*
Se $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos e $f : U \longrightarrow V$ é uma bijeção diferenciável, cuja inversa $g = f^{-1} : V \longrightarrow U$ também é diferenciável, então f é chamado de difeomorfismo.

Observação 4.2. *Nem todo homeomorfismo diferenciável é um difeomorfismo, ou seja, possui inversa diferenciável.*

Exemplo 4.3. *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é um homeomorfismo diferenciável, cuja inversa é $g = f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sqrt[3]{x}$ Mas g não é diferenciável no ponto $0 = f(0)$.*

Definição 4.4. *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *uma aplicação diferenciável. Dizemos que* f *é um difeomorfismo local quando para todo* $x \in U$ *existe* $B = B(x;\delta) \subset U$ *tal que* $f : B \longrightarrow V$ *é um difeomorfismo, onde* $V \subset \mathbb{R}^m$ *é um aberto que contém* $f(x)$*. Segue daí que se* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é um difeomorfismo local, então* $D_{f(x)} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é um isomorfismo,* $\forall x \in U$*.*

Observação 4.5. *O Teorema da Aplicação Inversa garante que a recíproca é válida, ou seja, se* $D_{f(x)} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é um isomorfismo* $\forall x \in U$ *então* f *é um difeomorfismo local, se* f *for de classe* C^1*.*
Decorre da definição anterior que um difeomorfismo local é uma aplicação aberta, ou seja, a imagem $f(A)$ *de qualquer aberto* $A \subset U$ *é um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^m$*.*

Demonstração. Com efeito, considere para cada $x \in A$, uma bola $B_x \in A$ centrada em x tal que $f : B_x \longrightarrow V_x$ seja um difeomorfismo, $Vx \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Então, $A = \bigcup B_x$ e $f(A) = f(\bigcup B_x) = \bigcup f(B_x) = \bigcup V_x$ que é uma reunião de abertos e, portanto, é um aberto. Seja $y \in f(\bigcup B_x) \Rightarrow y = f(z),\ z \in \bigcup B_x \Rightarrow z \in B_{x_i} \Rightarrow f(z) \in f(B_{x_i}) \Rightarrow y \in \bigcup f(B_{x_i})$. Seja $w \in \bigcup f_i(B_x) \Rightarrow w = f_i(k),\ k \in B_x \Rightarrow k \in \cap B_x \Rightarrow f_i(k) \in f(\cap B_x) w \in f(\cap B_x)$. $\square$

Observação 4.6. *Um difeomorfismo local é um difeomorfismo global se, e somente, é uma aplicação injetiva.*

Teorema 4.7. *Sejam* $U \subset \mathbb{R}^m$ *aberto e* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$*,* C^1 *Se, para algum* $a \in U$ *a diferencial* $D_{f(u)} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é injetiva, então existem* $\delta > 0$ *e* $c > 0$ *tais que* $B(a,\delta) \subset U$ *e para todo* $x, y \in B$*, tem-se* $\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\|$*. Em particular,* $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é injetiva.*

Demonstração. A função $\phi : S^{m-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi : (u) = \|D_{f(a)}u\|$ é positiva em todos os pontos da esfera unitária S^{m-1} que é compacta. Como $\phi(u) > 0$ para todo $x \in S^{m-1}$ e ϕ é contínua no compacto S^{m-1}, pelo Teorema de Weierstrass, existe $2c > 0$ tal que $\phi(u) \geq 2c$ ou seja, $\|D_{f(a)}u\| \geq 2c$, $\forall u \in S^{m-1}$. Por linearidade, temos que $\|D_{f(a)}v\| \geq 2c|v|$, $\forall v \in \mathbb{R}^m$. Para todo $x \in U$, escreva $r(x) = f(x) - f(a) - D_{f(a)}(x - a) \Rightarrow f(x) = f(a)D_{f(a)}(x - a) + r(x)$. Assim, para x e y quaisquer em U, temos $f(x) - f(y) = D_{f(a)}(x - y) + r(x) - r(y)$. Como $\|x + y\| \geq \|x\| - \|y\|$. temos:
$\|f(x) - f(y)\| = \|D_{f(a)}(x - y) + r(x) - r(y)\| \geq \|D_{f(a)}(x - y)\| - \|r(x) - r(y)\| \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \geq 2c\|x - y\| - \|r(x) - r(y)\|$.
Resta mostrar que $\|r(x) - r(y)\| \leq c$. Observe que r é de classe C^1 com $r(a) = 0$ e $D_{r(a)} = 0$. Pela continuidade de $D_{r(a)}$ temos que existe $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|D_{r(x) - D_{r(a)}}\| < \varepsilon = c$. Como $D_{r(a)} = 0$ e $\|D_{r(x)}\| < c$, pelo Teorema do Valor Médio, aplicado a r no convexo $B = B(x;\delta)$ temos que se $x, y \in B$ então $\|r(x) - r(y)\| < c\|x - y\|$

ou seja, satisfaz a condição de Lipschitz. Assim, $\|f(x)-f(y)\| \geq 2c\|x-y\| - c\|x-y\| \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \geq c\|x-y\|$. $\square$

Teorema 4.8. ***(Diferenciabilidade do Homeomorfismo inverso)*** *Seja $f : U \longrightarrow V$ um homeomorfismo de classe C^1 entre os abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Se para algum $x \in U$ $D_{f(x)} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é um operador invertível, então o homeomorfismo inverso $g : f^{-1} : V \longrightarrow U$ é diferenciável em $f(x)$ e $D_{g(f(x))} = D_{f(x)^{-1}}$.*

Demonstração. Dados x e $x+v \in U$ tais que $f(x) = y$ e $f(x+v) = y+w$. Temos, $w = f(x+v) - f(x) = D_{f(x)}v + s(v)$, onde $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{r(v)}{\|v\|} = 0$.
$v = g(f(x+v)) - g(f(x)) = g(y+w) - g(y)$.
Devemos mostrar que $g(y+w) - g(y) = D_{f(x)^{-1}} \cdot w + s(w)$. Como $v = g(y+w) - g(y) = D_{f(x)^{-1}}(D_{f(x)}v + r(v)) + s(w))$, temos que $v = v + D_{f(x)^{-1}}r(v) + s(w)$. Para concluir a demonstração vamos mostrar que $\frac{s(w)}{\|w\|} \to 0$, quando $w \to 0$. De fato, $\frac{s(w)}{\|w\|} = -D_{f(y)^{-1}}\frac{r(w)}{\|w\|} - \frac{\|v\|}{\|v\|} \Rightarrow \frac{s(w)}{\|w\|} = -D_{f(y)^{-1}}\frac{r(v)}{\|v\|}\frac{\|v\|}{\|w\|} = -D_{f(y)^{-1}}\frac{r(v)}{\|v\|} \cdot \frac{\|v\|}{\|f(x+v)-f(x)\|}$. Assim, se $w \to 0$, $v \to 0$, pois g é contínua e $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{r(v)}{\|v\|} = 0$.
Além disso, pelo Teorema (4.7) temos que,

$$w\| = \|f(x+v) - f(x)\| \geq c|v\| \Rightarrow \frac{\|v\|}{\|f(x+v)-f(x)\|} \leq \frac{1}{c} \tag{5}$$

Por 5 e como, $Df(x)^{-1} \cdot \frac{r(v)}{\|v\|} \to 0$ quando $v \to 0$ temos que $\lim\limits_{w \to 0} \dfrac{s(w)}{\|w\|} = 0$. $\square$

Lema 4.9. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto $a \in U$, com $D_{g(a)} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sobrejetiva. Se a é um ponto de mínimo local de $\|g(x)\|$ então $g(a) = 0$ $(x \in U)$.*

Demonstração. Se a é um ponto de mínimo local de $\|g(x)\|$, $x \in U$ então a também será um ponto de mínimo local da função $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = \|g(x)\|^2 =< g(x), g(x) >$. Então, $\phi'(a) = 0$. Como $\phi'(x) = 2 < D_{g(x)}, g(x) >$, temos que $\phi'(a)v = 2 < D_{g(a)}v, g(x) >= 0$. Assim, $g(a)$ é ortogonal a imagem de $D_{g(a)} = \mathbb{R}^n$, pois $D_{g(a)}$ é sobrejetora. Logo, $g(a) = 0$. $\square$

Teorema 4.10. ***(Teorema da Aplicação Inversa:)*** *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $D_{f(a)} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é um operador invertível, então existe uma bola aberta $B = B(a; \delta)$ tal que $f_{|B}$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(a)$*

Demonstração. Diminuindo o δ, se necessário, no Teorema (4.7), temos que $f_{|\overline{B}}$ é injetiva. Daí $f_{|\overline{B}}$ é um difeomorfismo, onde $\overline{B} = B[a; \delta]$. Como D_f é contínua em $x \in U$, também temos que $D_{f(a)} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é invertível e todo operador suficientemente próximo de um

operador invertível é também invertível. Logo D_f é um operador linear invertível $\forall y \in B$. Como f é um homeomorfismo e $g = f^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável, resta mostrar que $f(B)$ é aberto para usarmos o teorema 4.8 e concluir a demonstração.
De fato, seja S a esfera que é a fronteira de B. Como f é injetiva dado $f(p) = q \in f(S)$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\|f(x) - q\| \geq 2\varepsilon, \forall x \in S$. Agora vamos mostrar que $B(q;\varepsilon) \subset f(B)$. Seja $y \in B(q;\varepsilon)$. Considere $g(x) = f(x) - y$. Daí $\|g(x)\| = \|f(x) - y\|$. Veja que o ,ínimo de $\|g(x)\|$ não é atingido em nenhum ponto $x \in S$, pois $x \in S \Rightarrow \|f(x)-y\| \geq \varepsilon$. No entanto, se $p \in B$ então $\|f(p) - y\| = \|q - y\| < \varepsilon$. Logo, o mínimo de $\|g(x)\|$ é atingido em algum $x_0 \in B$. Assim, pelo Lema 4.9 $g(x_0) = f(x_0) - y = 0 \Rightarrow f(x_0) = y$. Portanto $y \in f(B)$ e daí, $f(B)$ é aberto. Logo, pelo Teorema 4.8 $f_{|B}$ é um difeomorfismo sobre $f(B) = V$ e o teorema está provado. $\square$

Observação 4.11. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0. \end{cases}$$

Temos que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & se\ x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & se\ x = 0 \end{cases}$$

e

$$f'\left(\frac{1}{k\pi}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & se\ k\ é\ par \\ \frac{3}{2}, & se\ k\ é\ ímpar. \end{cases}$$

Isto implica que f' não é contínua em $x = 0$, o que acarreta que f não é de classe c^1. Seja $\delta > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k\pi} < \delta$. Então

$$f'\left(\tfrac{1}{k\pi}\right) < 0, \ se\ k\ é\ par$$
$$f'\left(\tfrac{1}{k\pi}\right) > 0, \ se\ k\ é\ ímpar.$$

Pela continuidade de f' em $(0, \infty)$ segue que existem intervalos $I, J \subset (-\delta, \delta)$ tais que

$$f'(x) > 0, \forall x \in I$$
$$f'(x) < 0, \forall x \in J,$$

Isto implica que f é crescente em I e decrescente em J e portanto f não tem inversa em $(-\delta, \delta)$.

5 Integral Múltipla

5.1 A definição de integral

Sejam $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $A = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$. A é chamado boco n-dimensional. A é compacto e convexo. Volume$(A) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

P é uma partição do bloco A se para todo $B \in P$ temos $B = I_1 \times ... \times I_n$ com I_i intervalos e $I_i \in P_i$.

Observação 5.1. *Para todo $B \in P$ temos $B = I_1 \times ... \times I_n$ com $I_i \in [a_i, b_i]$. Além disso $\bigcup_{b \in P} B = A$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $B_i \neq B_j$ e $|P| < +\infty$.*

Dizemos que Q refina a partição P se para todo $B' \in Q$, existe $B \in P$ tal que $B' \subset B$.**Notação:** $Q \subset P$ ou $Q \leq P$

Definição 5.2. *Sejam $F : A \to \mathbb{R}$ limitada e P partição de A. A soma de Riemann inferior de F com respeito a P é:*

$$s(F, P) = \sum_{B \in P} vol(B).inf F(x).$$

A soma de Riemann superior de F com respeito a P é:

$$S(F, P) = \sum_{B \in P} vol(B).sup F(x)$$

Observação 5.3. $Vol(A).inf F(x) \leq s(F, P) \leq S(F, P) \leq Vol.sup F(x)$.

Teorema 5.4. *Se $Q \subset P$, então $s(f; P) \leq s(f; Q) \leq S(f; Q) \leq S(f; P)$.*

Demonstração. Vamos provar que $s(f; P) \leq s(f; Q)$.
De fato, se $B' \subset B$

$$\begin{aligned}
s(f; P) &= \sum_{B \in P} \inf_{x \in B} f(x) \cdot vol(B) \\
&= \sum_{B \in P} \inf_{x \in B} f(x) \Bigg(\sum_{B' \in Q} vol(B') \Bigg) \\
&= \sum_{B \in P} \sum_{B' \in Q} \inf_{x \in B} f(x) \cdot vol(B') \\
&\leq \sum_{B \in P} \sum_{B' \in Q} \inf_{x \in B'} f(x) \cdot vol(B') \\
&= \sum_{B \in Q} \inf_{x \in B'} f(x) \cdot vol(B') = s(f; Q).
\end{aligned}$$

$\square$

Observação 5.5. *Para qualquer partição P e Q, $s(f;P) \leq S(f;Q)$ Com efeito, seja R uma partição que refina P e Q (por exemplo $P \cap Q$) e aplica o teorema acima.*

Definição 5.6. *A integral superior de f em A é definida por*

$$\int_A^+ f(x)dx = \inf S(f;P).$$

A integral inferior de f em A é definida por

$$\int_A^- f(x)dx = \sup s(f;P),$$

onde P é uma partição de A.

Definição 5.7. *Dizemos que f é integrável em A se*

$$\int_A^+ f(x)dx = \inf S(f;P) = \int_A^- f(x)dx = \sup s(f;P),$$

e notamos por

$$I = \int_A f(x)dx$$

a integral de f em A.

Teorema 5.8. *f é integrável em A se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$ existe P partição tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$)

$$\int_A^+ f(x)dx - \int_A^- f(x)dx \quad \leq \quad S(f;P) - s(f;P)$$

para qualquer P, partição de A

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_A^+ f(x)dx - \int_A^- f(x)dx < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \\ &\Rightarrow \int_A^+ f(x)dx = \int_A^- f(x)dx \end{aligned}$$

($\Rightarrow$)
Seja $\varepsilon > 0$ e P partição, pela definição de ínfimo temos que

$$0 \leq S(f;P) - I < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja Q uma partição, pela definição de Supremo temos que

$$0 \leq I - s(f;Q) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Seja $R = P \cap Q$ então

$$S(f;P) \leq S(f;R) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$s(f;R) \geq s(f;P) > I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow S(f;R) - s(f;R) < I + \frac{\varepsilon}{2} - (I + \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$$

□

Teorema 5.9. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A um bloco. Se f é contínua em A então f é integrável em A.*

Demonstração. A é compacto e f é contínua $\Rightarrow$ f é uniformemente contínua em A. Dado $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Seja $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $\|x - y\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{vol(A)}$. Seja P uma partição tal que $\forall B \in P$, $B = I_1 \times ... \times I_n$ temos $|I_i| < \delta$. Então $\forall x, y \in B$, $\|x - y\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{volA} \Rightarrow \sup_{x\in B} f(x) - \inf_{x\in B} f(x) \leq \frac{\varepsilon}{volA}$. Então $S(f;P) - s(f;P) = \sum_{b\in P} \left(\sup_{x\in B} f(x) - \inf_{x\in B} f(x) \right) \cdot vol(B) \leq \sum_{b\in P} \frac{\varepsilon}{vol(A)} \cdot vol(B) = \frac{\varepsilon}{vol(A)} \sum_{b\in P} \cdot vol(B) = \varepsilon \Rightarrow f$ é integrável.

□

Definição 5.10. *A oscilação de f no ponto C é $\omega_C = \sup f(x) - f(y), x, y \in C$.*

Observação 5.11. *Pela prova do teorema anterior, podemos ver que f é integrável se $\forall\varepsilon > 0, \exists P$ tal que $\sum_{B\in P} \omega(f;B) \cdot vol(B) < \varepsilon$.*

Teorema 5.12. *sejam f e g integráveis em A. Então:*

i) *$f + g$ é integrável e $\int_A (f + g)(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx$,*

ii) *λf é integrável e $\int_A (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_A f(x)dx, \forall\lambda \in \mathbb{R}$,*

iii) *$f(x) \geq 0 \forall x \in A \Rightarrow \int_A f(x)dx \geq 0$. Então, se $f(x) \geq g(x) \forall, x \in A$, $\int_A f(x)dx \geq \int_A g(x)dx$,*

iv) *$|f|$ é integrável e $|\int_A f(x)dx| \leq \int_A |f(x)|dx$. Então se $|f(x)| \leq M, \forall x \in A$ e $|\int_A f(x)dx| \leq M \cdot vol(A)$*

v) *se f é contínua, então $\exists z \in A$ tal que $\int_A f(x)dx = f(z) \cdot vol(A)$.*

Demonstração. a demonstração dos itens $i)$, $ii)$ e $iii)$ ficam como exercício

iv) basta observar que $\Big| |f(x)| - |f(y)| \Big| \leq |f(x) - f(y)|$ e $\omega(f;B) \geq \omega(|f|;B)$.

v) $\inf_{x\in A} f(x) \cdot vol(A) \leq \int_A f(x)dx \leq \sup_{x\in A} f(x) vol(A)$. Consideraremos o $\inf_{x\in A} f(x) = f(x_0)$ e $\sup_{x\in A} f(x) = f(x_1)$, que existem pois A é compacto, o que garante que $[x_0, x_1] \subset A$, e f é contínua. Pelo TVI, existe $z \in (x_0, x_1)$ tal que $f(z) = c, \forall c \in [f(x_0), f(x_1)]$. Daí, podemos escolher $c = \frac{\int_A f(x)dx}{vol(A)} \in [f(x_0), f(x_1)]$.

□

5.2 Conjunto de Medida Nula

Definição 5.13. *Dizemos que X é um conjunto de medida de Lebesgue n-dimensional nula (medida nula) e escrevemos* $\lambda(X) = 0$ $(med(X) = Leb(x) = 0)$ *se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe uma cobertura enumarável* $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ *por blocos abertos* B_k *tal que*
$\sum_k vol(B_k) < \varepsilon$.

Exemplo 5.14. 1) *Em* $\mathbb{R}$

- $\lambda(\{x\}) = 0$
  $B =]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}[$, *onde B é uma cobertura de x e* $vol(B) = \varepsilon$

2) *Em* $\mathbb{R}^2$

- $\lambda(\{x\}) = 0$
- $\lambda(0 \times [0,1]) = 0$
  $B = [0,1] \times [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ *onde* $S = 0 \times [0,1]$, *B é cobertura de S e* $vol(B) = \varepsilon$
- $\lambda(reta) = 0$
  $B_k =]k-1, k+1[\times] - \frac{\varepsilon}{4k^2}, \frac{\varepsilon}{4k^2}[$ *e*
  $vol(B_k) = \frac{\varepsilon}{k^2}$ *reta* $\subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} vol(B_k) = 2\sum_{k=1}^{\infty} = 2\varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = c \cdot \varepsilon.$

- $\lambda(quadrado) \neq 0$

Proposição 5.15. $\lambda(X) = 0$ *e* $Y \subset X \Rightarrow \lambda(Y) = 0$.

Demonstração. Só é necessário observar que toda cobertura de X é também uma cobertura de Y. □

Teorema 5.16. *São equivalentes:*

i) $\lambda(X) = 0$,

ii) *Existe uma cobertura enumerável de blocos abertos* B_k *tal que* $\sum vol(B_k) < \varepsilon$,

iii) *Existe uma cobertura enumerável de blocos fechados* B_k *tal que* $\sum vol(B_k) < \varepsilon$,

iv) *Existe uma cobertura enumerável de cubos abertos* B_k *tal que* $\sum vol(B_k) < \varepsilon$,

v) *Existe uma cobertura enumerável de cubos fechados* B_k *tal que* $\sum vol(B_k) < \varepsilon$.

Demonstração. $ii) \Leftrightarrow iii)$
($\Rightarrow$) Se $X \subset \bigcup B_k$, B_k abertos e $\sum vol(B_k) < \varepsilon$. Então $X \subset \bigcup \overline{B_k}$ e $\overline{B_k}$ são fechados e $\sum vol(\overline{B_k}) = \sum vol(B_k) < \varepsilon$, pois B_k é um bloco.
($\Leftarrow$) Se $X \subset \bigcup B_k$, B_k blocos fechados e $vol(B_k).B_k = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$
$C_k =]a_1 - \delta, b_1 + \delta[\times]a_2 - \delta, b_2 + \delta[\times ... \times]a_n - \delta, b + \delta[, x \subset C_k$, onde os C_k são blocos abertos. Daí, podemos escolher δ tal que $vol(C_k) = 2vol(B_k)$. $\Rightarrow \sum vol(C_k) = 2\varepsilon vol(B_k) < 2\varepsilon$. A demonstração dos demais itens ficaram como exercício. □

Observação 5.17. $\lambda(A) = \lambda(\overline{A})$? *FALSO! Pois,* $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, *mas* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *e* $\lambda(\mathbb{R}) \neq 0$.

Proposição 5.18. *Uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.* $[\forall k, \lambda(X_k) = 0 \Rightarrow \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty}) = 0]$.

Demonstração. $X = \bigcup_{k=1}^{\infty}$, onde para cada k, $\lambda(X_k) = 0$. Seja $\varepsilon > 0$, como $\lambda(X_k) = 0$, temos que existe uma cobertura enumerável $X_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^k$ e temos $\sum vol(B_i^k) < \dfrac{\varepsilon}{2^k}$.
Temos uma cobertura enumerável de X tal que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^k \text{ e}$$

$$\sum_{i,j} vol(B_i^k) = \sum_k \sum_i vol(B_i^k) < \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \sum_k \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

□

Exemplo 5.19. 1) *Em* $\mathbb{R}, \lambda(\mathbb{Q}) = 0$, *pois* $\mathbb{Q}$ *é um conjunto enumerável de pontos e* $(\lambda(x)) = 0$.

Teorema 5.20. *Seja* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n (U \subset \mathbb{R}^n)$ *lipschitz. Então se* $\lambda(U) = 0 \Rightarrow \lambda(f(U)) = 0$.

Demonstração. Exercício! □

Teorema 5.21. *Seja* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(U \subset \mathbb{R}^n)$ *de classe* C^1 *no aberto U. Então para* $X \subset U$ *se* $\lambda(X) = 0$ *então* $\lambda(f(X)) = 0$.

Demonstração. Se f é C^1 então decorre da Desigualdade do Valor Médio que f é localmente lipschitz (ou seja, $\forall x \in U$ existe uma vizinhança V_x tal que f é lipschitz em V_x.)Assim, f é lipschitz em $X \cap V_x$.
$\lambda(f(X \cap V_x)) = 0$ pois $\lambda(X \cap V_x) \leq \lambda(X) = 0$. Além disso,

$$f(X) \subset \bigcup_{x \in X} f(X \cap V_x) \Rightarrow f(X) \subset \bigcup_{x \in \mathbb{N}} f(X \cap V_x) \Rightarrow \lambda(f(X)) = 0.$$

□

Teorema 5.22. *(Lindelof) Para toda cobertura $X \subset \bigcup_{i \in I} B_i$ existe uma subcobertura enumerável $X \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$.*

Demonstração. Exercício! □

Corolário 5.23. *Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é C^1 com U aberto e $n < m$ então $\lambda(f(U)) = 0$.*

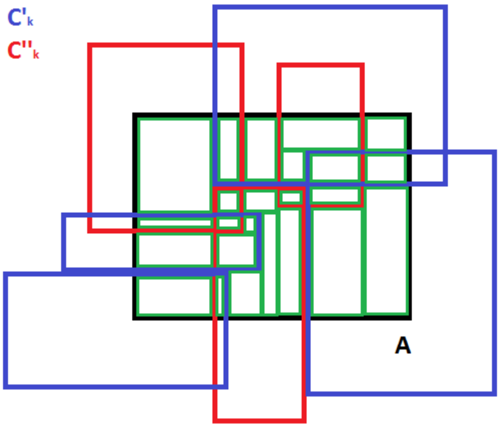
Aplicação: O gráfico de uma função C^1 tem medida nula em $\mathbb{R}^2$.

5.3 Teorema de Lebesgue

Definição 5.24. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e f: $X \to \mathbb{R}$ limitada. Para $x \in X$ e $\delta > 0$ então $\Omega(\delta) = \omega(f\ ,\ X \cap B(x\ ,\ \delta))$. Definimos a **oscilação** de f no ponto x por $\omega(f\ ,\ x_o) = \lim_{\delta \to 0} \Omega(\delta) = \lim_{\delta \to 0} \omega(f\ ,\ X \cap B(x_o\ ,\ \delta)) = \inf_{\delta > 0} \omega\ (f\ ,\ B(x_o\ ,\ \delta))$.*

Teorema 5.25. ***(Teorema de Lebesgue)*** *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ limitada no bloco $A \in \mathbb{R}^n$. f é integrável $\iff$ o conjunto dos pontos de descontinuidade tem medida nula.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $D_f :=$ { Conjunto dos Pontos de Descontinuidade de f e suponhamos que $\lambda(D_f)\} = 0$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, seja $D_f \subset C'_1 \subset ... \subset C'_k \subset ...$ uma cobertura enumerável de blocos abertos tais que $\sum^{k} \text{vol}(C'_k) < \frac{\varepsilon}{2K}$, onde $K = M - m$ é a diferença entre o sup e o inf de f em A. Para cada ponto $x \in A - D_f$, seja C''_x um bloco aberto contendo x, tal que a oscilação de f no fecho de C''_x seja inferior a $\frac{\varepsilon}{2 \cdot vol(A)}$. Sendo A compacto, a cobertura $A \subset (\bigcup C'_k) \cup (\bigcup C''_x)$ admite uma subcobertura finita $A \subset C'_1 \cup ... \cup C'_r \cup C''_1 \cup ... \cup C''_s$. Seja P uma partição de A tal que cada bloco aberto $B \in P$ esteja contido num dos blocos C'_k ou num dos C''_j.



Se $A = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ então podemos tomar $P = P_1 \times ... \times P_n$ onde, para cada $i = 1, ..., n$, P_i é formada pelos pontos a_i, b_i mais as i-ésimas coordenadas dos vértices dos blocos C'_k ou C''_j que pertençam ao intervalo $[a_i, b_i]$. Os blocos de P contidos em algum C'_k serão genericamente designados por B' e os demais blocos de P (necessariamente contidos em algum C''_j) serão chamados de B''. A soma dos volumes dos B' é menor do que $\frac{\varepsilon}{2K}$ e, em cada bloco de B'', a oscilação de f não excede $\frac{\varepsilon}{2 \cdot vol(A)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{B \in P} \omega_B \cdot vol(B) &= \sum_{B'} \omega_{B'} \cdot vol(B') + \sum_{B''} \omega_{B''} \cdot vol(B'') \\
&\leq K \cdot \sum vol(B') + \frac{\varepsilon}{2 \cdot vol(A)} \cdot \sum vol(B'') \\
&< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2 \cdot vol(A)} \cdot vol(A) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Segue-se, então, que f é integrável.

($\Leftarrow$) Suponhamos que fé integrável. Para cada $k \in \mathbb{N}$, ponhamos $D_k = \{x \in A, \omega(f, x) \geq \frac{1}{k}\}$, logo $D_f = D_1 \cup ... \cup D_k \cup ...$. Para mostrar que D_f tem medida nula, basta provar que $\lambda(D_f) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Seja, então, dado $\varepsilon > 0$. Como f é integrável, existe uma partição P de A tal que $\sum_{B \in P} \omega_B \cdot vol(B) < \frac{\varepsilon}{k}$. Indiquemos genericamente com B' os blocos da partição P que contém algum ponto de D_k em seu interior. Para cada um desses blocos B', vale $\omega_{B'} \geq \frac{1}{k}$. Portanto,

$$\frac{1}{k} \cdot \sum vol(B') \leq \sum \omega_{B'} \cdot vol(B') \leq \sum_{B \in P} \omega_B \cdot vol(B) < \frac{\varepsilon}{k}$$

Multiplicando por k, obtemos $\sum vol(B') < \varepsilon$. Ora, é claro que $D_k \subset (\bigcup B') \cup X$, onde X é a reunião das faces próprias dos blocos $B \in P$ nos quais há algum ponto de D_k. Sabemos que $\lambda(X) = 0$. Segue-se daí que $\lambda(D_k) = 0$. (Ver observação a seguir).

$\square$

Observação 5.26. *Seja $Z \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto tal que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem blocos B_1, ..., B_k, ... e um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ com $Z \subset (\bigcup B_k) \cup X$, $\sum vol(B_k) < \varepsilon$ e $\lambda(X) = 0$. Então $\lambda(Z) = 0$. Com efeito, tomando blocos C_1, ..., C_k, ... com $X \subset \bigcup C_k$ e $\sum \lambda\ C_k < \varepsilon$, tem-se $Z \subset (\bigcup B_k) \cup (\bigcup C_k)$ onde $\sum vol(B_k) + \sum vol(C_k) < 2 \cdot \varepsilon$.*

Exemplo 5.27. $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, se\ x \neq \frac{1}{2} \\ 0, se\ x = \frac{1}{2}\ e\ y \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, se\ x = \frac{1}{2}\ e\ y \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases},$$

$D_f = \dfrac{1}{2} \times [0,1] \implies \lambda(D_f) = 0 \implies f$ *é integrável.*

Teorema 5.28. *Seja $f : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ integrável ($A_1 \subset \mathbb{R}^n, A_2 \subset \mathbb{R}^m$). Para $x \in A_1$, definimos $f_x(y) = f(x,y)\ \forall y \in A_2$ e $\varphi(x) = \int_{A_2}^{-} f_x(y)dy$ e $\psi(x) = \int_{A_2}^{+} f_x(y)dy$. Então, φ e ψ são integráveis e*

$$\int_{A_1 \times A_2} f(x,y)dxdy = \int_{A_1} \varphi(x)dx = \int_{A_1} \psi(x)dx.$$

Isto é:

$$\int_{A_1 \times A_2} f(x,y)dxdy = \int_{A_1}(\int_{A_2}^{-} f(x,y)dy)dx = \int_{A_1}(\int_{A_2}^{+} f(x,y)dy)dx.$$

Observação 5.29. *Não sabemos se f_x é integrável em A_2*

Demonstração: As partições do bloco $A_1 \times A_2$ são da forma $P = P_1 \times P_2$, onde P_1 e P_2 são partições dos blocos A_1 e A_2 respectivamente. Os blocos de P são os produtos $B_1 \times B_2$ com $B_1 \in P_1$ e $B_2 \in P_2$. Mostremos que $s(f,P) \leq s(\varphi, P_1) \leq S(\varphi, P_1) \leq S(f,P)$. Daí resultará que φ é integrável e que $\int_{A_1} \varphi(x)dx = \int_{A_1 \times A_2} f(x,y)dxdy$. Na verdade, basta provar a primeira das desigualdades acima, pois a segunda é óbvia e a terceira é análoga. Também por analogia, não precisamos provar que $\int_{A_1} \psi(x)dx = \int_{A_1 \times A_2} f(x,y)dxdy$. Começamos lembrando que se $X \subset Y \subset \mathbb{R}$ então o $\inf(Y) \leq \inf(X)$. Segue-se que, para todo bloco $B_1 \times B_2 \in P$, tem-se, $m(f, B_1 \times B_2) \leq m(f_x, B_2)$, seja qual for $x \in B_1$. Portanto,

$$\sum_{B_2 \in P_2} m(f, B_1 \times B_2) \cdot vol(B_2) \leq \sum_{B_2 \in P_2} m(f_x, B_2) \cdot vol(B_2) \leq \varphi(x).$$

Como isto vale para todo $x \in B_1$, concluímos que:

$$\sum_{B_2 \in P_2} m(f, B_1 \times B_2) \cdot vol(B_2) \leq m(\varphi, B_1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{B_1\times B_2\in P} m(f,B_1\times B_2)\cdot vol(B_1)\cdot vol(B_2) \\ &= \sum_{B_1\in P_1}\left(\sum_{B_2\in P_2} m(f,B_1\times B_2)\cdot vol(B_2)\right)\cdot vol(B_1) \\ &\le \sum_{B_1\in P_1} m(\varphi,B_1)\cdot vol(B_1) = s(\varphi,P_1) \end{aligned}$$

□

Exemplo 5.30. $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, se\ x\neq \frac{1}{2} \\ 0, se\ x=\frac{1}{2}\ e\ y\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 1, se\ x=\frac{1}{2}\ e\ y\in[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \end{cases},$$

f é integrável em $[0,1]\times[0,1]$, mas $f_{\frac{1}{2}}(.)=f(\frac{1}{2},.)$ não é integrável em $[0,1]$.

$\varphi(x) = \int^{-}_{[0,1]} f_x(y)dy = \begin{cases} 0, se\ x\neq\frac{1}{2} \\ 0, se\ x=\frac{1}{2}\end{cases} \implies \inf f_{\frac{1}{2}}(y) = 0\ \forall I$ *intervalo (cada I tem pontos $\mathbb{Q}$ e pontos $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$)* $\implies \int_{[0,1]}\varphi(x)dx = 0 = \int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy.$

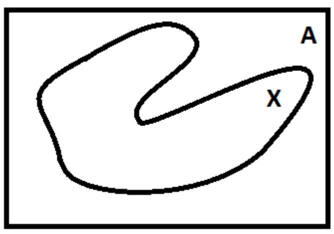
$\psi(x) = \int^{+}_{[0,1]} f_x(y)dy = \begin{cases} 0, se\ x\neq\frac{1}{2} \\ 1, se\ x=\frac{1}{2}\end{cases} \implies \psi$ *é integrável, pois possui 1 ponto de descontinuidade e* $\lambda(\{\frac{1}{2}\})=0 \implies \int_{[0,1]}\varphi(x)dx = 0 = \int_{[0,1]}\psi(x)dx.$

Uma outra maneira seria usar o teorema anterior.

Definição 5.31. *Seja $f:X\to\mathbb{R}$, definimos que*

$$\int_X f(x)dx = \int_A g(x)dx$$

onde e $g:A\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=\begin{cases} f(x), se\ x\in X \\ 0, se\ x\notin X\end{cases}$



Exercício: Provar que $\inf\limits_{x,y} f(x,y) \le \inf\limits_{x}\inf\limits_{y} f(x,y)$. Além disso, achar um exemplo em que $\inf\limits_{x,y} f(x,y) < \inf\limits_{x}\inf\limits_{y} f(x,y)$.

5.4 Conjuntos J-mensuráveis

Definição 5.32. *Seja a* ***função característica*** $1_X\colon A \to \mathbb{R}$*, ou seja,* $1_X(y) = \begin{cases} 1, se\ y \in X \\ 0, se\ y \notin X \end{cases}$.
Dizemos que X *é* ***J-mensurável*** *se a função característica é integrável e* $vol(X) = \int_X 1_X(x)dx$.

Teorema 5.33. X *é J-mensurável* $\iff$ $\lambda\ (\delta(X)) = 0$.

Demonstração: X J-mensurável $\iff$ 1_X é integrável $\iff$ $\lambda(D_{1_X}) = 0 \iff \lambda\ (\delta(\mathrm{X})) = 0$, onde D_{1_X} representa os pontos de descontinuidade.

□

Teorema 5.34. *Seja* X *e* Y *J-mensuráveis, então:*

1. $X \cup Y$, $X \cap Y$ *e* $X \backslash Y$ *são J-mensuráveis.*
2. $vol(X \cup Y) = vol(X) + vol(Y) - vol(X \cap Y)$.
3. $vol(X \backslash Y) = vol(X) - vol(X \cap Y)$.

Demonstração: Deixamos essa demonstração como **exercício**.

□

6 Mudança de Variáveis

6.1 Introdução

Começaremos estabelecendo as notações:

- U e V abertos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.
- $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1.
- $X \subset V$ compacto e J-mensurável de U.
- $f : h(X) \to \mathbb{R}$ integrável.

X é um subconjunto compacto J-mensurável de U. A fronteira de X, que tem medida nula, está contida em X (logo em U) e sua imagem por h, que é a fronteira do compacto $h(X)$, tem medida nula. Portanto, $h(X)$ também é um conjunto J-mensurável.

O teorema que iremos demonstrar diz que a igualdade abaixo é verdadeira:

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) \cdot |det\ dh(x)|dx.$$

Observação 6.1. *A estranheza maior dessa fórmula se dá pelo determinante e pelo valor absoluto. É natural, para $n > 1$, que a diferencial seja vista como Jacobiano, mas é necessário a percepção que no caso unidimensional, $h^{'}(x)$ é um número, mas o Jacobiano não o é. Além disso, em relação ao valor absoluto, este está relacionado a uma possível modificação de orientação. Inclusive, é percebido de forma bastante sutil no caso $n = 1$.*

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(y)dy = \int_a^b f(h(x)) \cdot h'(x)dx.$$

De fato, se chamarmos de I o intervalo $[a, b]$ e $J = h(I)$ o intervalo cujos extremos são $h(a)$ e $h(b)$, temos dois casos a analisar:

1. $\int_J f(y)dy = \int_{h(a)}^{h(b)} f(y)dy$, *se $h(a) < h(b)$, isto é se $h^{'}(x) > 0$.*
2. $\int_J f(y)dy = \int_{h(b)}^{h(a)} f(y)dy = -\int_{h(a)}^{h(b)} f(y)dy$, *se $h(a) > h(b)$, isto é se $h^{'}(x) < 0$.*

6.2 Caso Unidimensional

Dado o intervalo $I = [a, b]$, escrevemos $|I| = b - a$.

Teorema 6.2. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}$ abertos, $h : U \to V$ um difeomorfismo C^1, $I \subset U$ um intervalo compacto, $J = h(I)$ e $f : J \to \mathbb{R}$ limitada. Então,*

$$\int_J^+ f(y)dy = \int_I^+ f(h(x)) \cdot |h'(x)|dx.$$

Demonstração: Sem perda da generalidade, podemos admitir que $f(y) \geq 0$ para todo $y \in J$ pois, se somarmos a mesma constante positiva a f, o lado esquerdo sofrerá o acréscimo de $c\cdot\ |J|$ enquanto o acréscimo sofrido pelo lado direito será de $c\cdot\ \int_I |h'(x)|ds$. Como $h^{'}(x)$ não muda de sinal para $x \in J$, o valor desta integral é $c\cdot|h(b)-h(a)| = c\cdot|J|$ também. Esta observação nos deixa livres para manipular desigualdades.

As partições de $J = h(I)$ são do tipo $h(P)$, dadas por intervalos da forma $J_r = h(I_r)$, onde os I_r $(r = 1, ..., k)$ são os intervalos de uma partição P de I. Para cada r, ponhamos $M_r = \sup_{y\in J_r} f(y) = \sup_{x\in I_r} f(h(x))$ e $c_r = \sup_{x\in I_r} |h'(x)|$. Evidentemente, $|P| \to 0 \iff |h(P)| \to 0$.

Pelo Teorema do Valor Médio, para cada $r = 1, ..., k$ existe $\xi_r \in I_r$ tal que $|J_r| = |h'(\xi_r)| \cdot |I_r|$. Pondo $\eta_r = c_r - |h'(\xi_r)|$, temos $\eta_r \geq 0$ e, em virtude da continuidade uniforme de $h^{'}$ no intervalo I, $\lim_{|P|\to 0} \eta_r = 0$.

Segue-se que $\lim_{|P|\to 0} \sum_{r=1}^{k} \eta_r \cdot |I_r| = 0$, pois

$$0 \leq \sum_{r=1}^{k} \eta_r \cdot |I_r| \leq (\max_r \eta_r) \cdot \sum_{r=1}^{k} |I_r| = (\max_r \eta_r) \cdot |I|.$$

Então,

$$S(f, h(P)) = \sum_{r=1}^{k} M_r \cdot |J_r| = \sum_{r=1}^{k} M_r \cdot c_r \cdot |I_r| - \sum_{r=1}^{k} M_r \cdot \eta_r \cdot |I_r|$$

e

$$S((f \circ h) \cdot |h'|, P) = \sum_{r=1}^{k} N_r \cdot |I_r|, \text{ onde } N_r = \sup_{x \in I_r} (f \circ h) \cdot |h'| \leq M_r \cdot c_r.$$

pois se φ, ψ: A $\to \mathbb{R}$ são duas funções não negativas limitadas quaisquer então $\sup_{x \in A}(\varphi(x) \cdot \psi(x)) \leq \sup_{x \in A} \varphi(x) \cdot \sup_{x \in A}(\psi(x)$. Logo, para toda partição P do intervalo I, vale:

$$S((f \circ h) \cdot |h'|, P) \leq S(f, h(P)) + M \cdot \sum_{r=1}^{k} \cdot \eta_r . |I_r|, \text{ onde M} = \sup_{y \in J} f(y).$$

Segue-se que

$$\textstyle\int_I^+ f(h(x)) \cdot |h'(x)| dx = \lim_{|P| \to 0} S((f \circ h) \cdot |h'|, P) \leq \lim_{|P| \to 0} S((f, h(P)) = \int_J^+ f(y) dy.$$

A desigualdade oposta, $\int_J^+ f(y)dy \leq \int_I^+ f(h(x)) \cdot |h'(x)|dx$, é análoga, bastando usar h^{-1}: J $\to I$ em vez de h, $(f \circ h) \cdot |h'|$: $I \to \mathbb{R}$ em vez de f e levando em conta que, para todo $y = h(x)$, $x \in I$, tem-se que $(h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(x)}$.

Então concluímos que

$$\textstyle\int_J^+ f(y) dy = \int_I^+ f(h(x)) \cdot |h'(x)| dx.$$

□

6.3 Difeomorfismos Primitivos

O próximo caso particular que consideraremos é aquele em que h é um difeormosfismo primitivo.

Definição 6.3. *Dizemos que h é um difeomorfismo primitivo se é de um dos tipos seguintes:*

Tipo 1: São fixados os índices i, j, com $1 \leq i < j \leq n$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dado por

$$h(x) = h(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = h(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n).$$

Tipo 2: Tem-se uma função $\varphi : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1, e para todo $x \in U$ vale

$$h(x) = h(\varphi(x), x_2, ..., x_n).$$

Teorema 6.4. *Seja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo primitivo do Tipo 1. Para todo conjunto J-mensurável $X \subset \mathbb{R}^n$ e toda função integrável $f : h(X) \to \mathbb{R}$ tem-se*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det dh(x)|dx$$

.

Demonstração. O difeomorfismo h é um operador linear, com $\det dh(x) = -1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, logo $|\det dh(x)| = 1$. Devemos, portanto, mostrar que $\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x))dx$. Ora, para todo bloco $B \subset \mathbb{R}^n$, sua imagem $h(B)$ é também um bloco, com arestas de mesmo comprimento que as de B, logo vol $h(B)$=vol B. Como o volume de um conjunto J-mensurável $Z \subset \mathbb{R}^n$ é o ínfimo dos números $\sum$ vol B_i, onde os B_i são blocos, com $Z \subset B_1 \cup ... \cup B_k$, segue-se que vol $h(Z)$ = vol Z. Toda decomposição $h(X) = Y_1 \cup ... \cup Y_k$ é tal que $Y_i = h(X_i)$, onde $X = X_1 \cup ... \cup X_k$ é uma decomposição de X. Todo ponto de Y_i é da forma $h(\xi_i)$, com $\xi_i \in X_i$. Logo

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \lim_{|D|\to 0} \sum f(h(\xi_i))\cdot \text{vol} Y_i = \lim_{|D|\to 0} \sum f(h(\xi_i))\cdot \text{vol} X_i = \int_X f(h(x))dx. \qquad \square$$

Teorema 6.5. *O Teorema de Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas é válido quando $X \subset \mathbb{R}^n$ é um bloco retangular e $h : U \to V$ é um difeomorfismo primitivo do Tipo 2.*

Demonstração. Por conveniência, escreveremos os pontos de $\mathbb{R}^n$ sob a forma $x = (s, w)$, com $s \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{R}^{n-1}$, e consideremos o bloco $X = I \times A$ como produto cartesiano do intervalo $I = [a, b]$ pelo bloco $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Note-se que, para todo $w \in A$ fixado, a função $\varphi_w : s \mapsto \varphi(s, w) = t$ é um difeomorfismo do intervalo I sobre o intervalo $J_w = \varphi_w(I) = \varphi(I \times w)$. Observemos ainda que a matriz jacobiana de h tem a primeira linha igual ao gradiante de φ e, a partir da segunda linha, coincide com a matriz identidade $(n-1) \times (n-1)$. Portanto, $\det dh(x) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}(s, w) = \varphi'_w(s)$. Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto contendo J_w para todo $w \in A$. Então $h(X) = j \times A$. Como de praxe, $\bar{f} : J \times A \to \mathbb{R}$ é a função integrável igual a f nos pontos de $h(X)$ e igual a zero nos demais pontos de $J \times A$. Então o Teorema 6.2 nos permite escrever:

$$\begin{aligned}
\int_{h(X)} f(y)dy &= \int_{h(X)} f(t, w)dt\,dw = \int_{J\times A} \bar{f}(t, w)dt\,dw \\
&= \int_A \left(\overline{\int_J} \bar{f}_w(t)dt \right) dw = \int_A \left(\overline{\int_{J_w}} f_w(t)dt \right) dw \\
&= \int_A \left(\overline{\int_I} f_w(\varphi(s, w))|\varphi'_w(s)|ds \right) dw \\
&= \int_{I\times A} f(\varphi(s, w), w) \cdot |\det dh(s, w)|ds\,dw \\
&= \int_X f(h(x)) \cdot |\det dh(x)|dx.
\end{aligned}$$

$\square$

6.4 Todo Difeomorfismo C_1 é Localmente Admissível

Definição 6.6. *Seja D conjunto dos difeomorfismos de classe C_1 para os quais é válido o Teorema de Mudança de Variáveis. Os elementos de D serão chamados difeomorfismos admissíveis.*

Como sabemos, o objetivo deste capítulo é provar que todo difeomorfismo de classe C_1 é admissível. Acabamos de ver que os difeomorfismo primitivos pertencem a D. Além disso, como

$$\det((h_1 \circ h_2)'(x)) = \det dh_1(h_2(x)) \cdot \det dh_2(x),$$

vê-se imediatamente que $h_1 \circ\ h_2 \in D$ quando $h_1 \in D$ e $h_2 \in D$. Por exemplo, todo difeomorfismo da forma

$$h(x) = (x_1, ..., x_{j-1}, \varphi(x), x_{j+1}, ..., x_n)$$

é admissível, pois é composto de três difeomorfismos primitivos. Nesta seção, provaremos que todo difeomorfismo de classe C_1 é localmente admissível. Este é o conteúdo do Teorema seguinte, o qual, evidentemente, é um resultado provisório.

Teorema 6.7. *Seja $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C_1 entre abertos de $\mathbb{R}^n$. Todo ponto de U possui uma vizinhança, restria à qual h é admissível.*

Demonstração. Basta provar que, dado $x_0 \in U$, se h é definido numa vizinhança de x_0 e tem a forma

$$h(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_j(x), x_{j+1}, ..., x_n), \quad \text{com } j{>}1,$$

então existe um difeomorfismo k, de classe C_1, composto de difeomorfismos primitivos, cuja imagem é um vizinhança de x_0, tal que

$$h(k(w)) = (\psi_1(w), ..., \psi_{j-1}(w), w_j, ..., w_n).$$

Ora, as j primeiras linhas da matriz jacobiana de h são os vetores gradφ_1,...,gradφ_j e as demais linhas coincidem com as da matriz identidade $n \times n$. Compondo h, se necessário, com um difeomorfismo do Tipo 1, podemos admitir que $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}(x_0) \neq 0$. Pelo Teorema da Forma Local das Submersões (aplicado à função φ_j), existe um difeomorfismo admissível

$$k : w \mapsto (w_1, ..., k_j(w), w_{j+1}, ..., w_n)$$

cuja imagem é uma vizinhança de x_0 tal que $\varphi_j(k(w)) = w_j$ para todo w no domínio de k. Então

$$h(k(w)) = (\varphi_1(k(w)), ..., \varphi_{j-1}(k(w)), w_j, ..., w_n),$$

completando assim a demonstração. □

6.5 Conclusão: Todo Difeomorfismo de Classe C^1 é Admissível

Para terminar a demonstração do Teorema da Mudança de Variáveis, vamos usar um resultado topológico elementar que estabeleceremos agora.

Definição 6.8. *Seja* $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ *uma cobertura do conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Diz-se que* $\delta > 0$ *é um **número de Lebesgue** dessa cobertura quando todo subconjunto* $Y \subset X$ *com diâmetro* $< \delta$ *está contido em algum* C_λ.

Teorema 6.9. *Toda cobertura aberta* $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *de um conjunto compacto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *possui um número de Lebesgue.*

Demonstração: Se supusermos, por absurdo, que nenhum $\delta > 0$ é número de Lebesgue da cobertura dada, obteremos, para cada k $\in \mathbb{N}$, um conjunto $Y_k \subset X$, com diam$(Y_k) < \frac{1}{k}$ mas nenhum A_λ contém Y_k. Escolhemos um ponto y_k em cada Y_k. Passando a uma subsequência se necessário, a compacidade de X assegura a existência de a $\in$ X tal que $\lim_{k \to \inf} y_k = a$. Existe $\lambda_o \in L$ tal que a $\in A_{\lambda_o}$. Existe ainda $\varepsilon > 0$ com $B(a, \varepsilon) \subset A_{\lambda_o}$, pois A_{λ_o} é aberto. Tomemos k $\in \mathbb{N}$ tão grande que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|a - y_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Então, lembrando que diam$(Y_k) < \frac{1}{k}$, para todo y $\in Y_k$ temos:

$$|y - a| \leq |y - y_k| + |y_k - a| < \tfrac{1}{k} + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Segue-se que $Y_k \subset B(a, \varepsilon) \subset A_{\lambda_o}$, uma contradição.

□

Teorema 6.10. *Sejam* $X \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto compacto J-mensurável,* $h : U \to V$ *um difeomorfismo de classe* C_1 *entre abertos* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *e* $f : h(X) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável. Então*

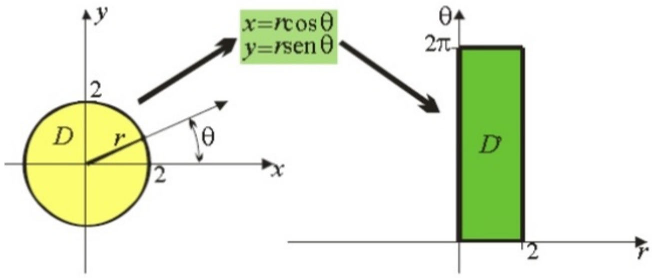
$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det dh(x)| dx.$$

Demonstração. Existe uma cobertura aberta $X \subset \bigcup_{x \in X} W_x \subset U$ tal que a restrição de h a cada W_x é um difeomorfismo admissível. Seja δ<0 um número de Lebesgue dessa cobertura. Tomamos uma decomposição $D = (X_1, ..., X_k)$ de X tal que cada conjunto X_i tenha diâmetro inferior a δ. (Para obter D, basta tomar uma partição P de um bloco A contendo X de modo que os blocos B_i de P tenham arestas <δ na norma do máximo, ou $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$ na norma euclidiana. Em seguida, ponha $X_i = B_i \cap X$). Então

$$\begin{aligned} \int_{h(X)} f(y)dy &= \sum_i \int_{h(X_i)} f(y)dy \\ &= \sum_i \int_{X_i} f(h(x)) \cdot |\det dh(x)| dx \\ &= \int_X f(h(x)) \cdot |\det dh(x)| dx. \end{aligned}$$

□

Exemplo 6.11. *Calcular* $\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ *sendo* D *o círculo centrado na origem e de raio* 2.



Utilizando coordenadas polares para fazer a mudança de variável, temos que a região D *no plano* xy *corresponde a região* D' *no plano* θr, *em que* $D' = \{0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq r \leq 2\}$. *Utilizando o Teorema de Mundança de Variáveis temos que,*

$$\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{D'} \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} \cdot \left|\det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}\right| drd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\,drd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3}d\theta = \frac{16\pi}{3}.$$

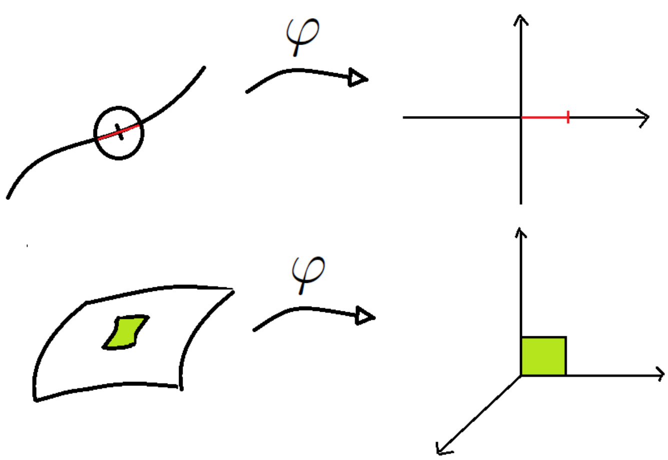
7 Subvariedade

7.1 Subvariedade

Observação 7.1. *Trabalharemos com difeomorfismos* C^∞ *e* $M \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 7.2. *Dizemos que* M *é uma* ***subvariedade*** *se para todo* $x_o \in M$, *existe* U *vizinhança de* x_o *e* $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ *um difeomorfismo tal que*

$$\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}) \cap \varphi(U).$$



Observação 7.3. *φ é chamada de **carta local** de M em x_o.*

Observação 7.4. *Uma família (φ_i , U_i) é chamado de **atlas** se ele cobre M, ou seja, M $\subset \bigcup_i \varphi_i(U_i)$.*

Proposição 7.5. *1. dim(M_x) não depende da carta.*

2. Se M é subvariedade conexa então dim(M_x) = p, $\forall x \in M$. (p é chamado de dimensão de M)

Demonstração:

1. Vamos supor que existe φ_1 tal que φ_1(U $\cup$ M) = ($\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$) $\cap$ φ_1(U) e φ_2(U $\cup$ M) = ($\mathbb{R}^q \times \{0\}^{n-q}$) $\cap$ φ_2(U). Suponha $\psi = \varphi_2$ o φ_1^{-1} e a $\in$ ($\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$) $\cap$ φ(U). ψ é um difeomorfismo local de a de um aberto ($\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$) no ($\mathbb{R}^q \times \{0\}^{n-q}$). Tome d$\psi_a$: ($\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$) $\to$ ($\mathbb{R}^q \times \{0\}^{n-q}$) $\implies$ dψ_a é linear e bijetora $\implies$ p = dim($\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$) = dim($\mathbb{R}^q \times \{0\}^{n-q}$) = q.

2. Sejam x tal que dim(M_x) = p e C = {y tal que dim(M_y) = p}. Vamos verificar se C é aberto. Seja y tal que dim(M_y) = p, perguntamos se existe $U_y \subset$ C. Para isso, existe φ e U com y $\in$ U tal que φ(U) $\cap$ M) = ($\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$) $\cap$ φ(U). Deixamos como **exercício** a prova que U_y = U $\cap$ M $\in$ C. $\implies$ φ é uma carta para y $\implies$ dim(M_y) = p.

□

Definição 7.6. *$M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma **subvariedade** se $\forall x_0 \in M$ existe U_{x_0} vizinhança de x_0 e um difeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$, com $\varphi(U)$ vizinhança de 0 e $\varphi(x_0) = 0$ tal que $\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}) \cap \varphi(U)$.*

Proposição 7.7. *$M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade se, e somente se, $\forall x_0 \in M, \exists U$ vizinhança de x_0 tal que:*

*(i) (**gráfico**) existe uma mudança linear de coordenadas $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e uma função C^∞, $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ tal que*

$$U \cap M = \{A(z, f(z)) \; ; \; z \in \mathbb{R}^p\} \cap U.$$

ou

*(ii) (**equação**) existe uma função C^∞, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ tal que $dF(x_0)$ é sobrejetiva e $U \cap M = F^{-1}(\{0\})$.*

ou

(iii) ***(parametrização)*** *existe $V \subseteq \mathbb{R}^p$ vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^p$ e uma função C^∞, $j : V \longrightarrow M \cap U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $j(0) = x_0, dj(0)$ é injetora e j é bijetora e bicontínua (contínua com inversa contínua).*

Observação 7.8. *j é chamada de imersão.*

Demonstração.

$(i) \Rightarrow Def.$: Vamos supor que localmente M é o gráfico de uma função f, isto é, $U \cap M = \{(z, f(z))\ ;\ z \in \mathbb{R}^p\} \cap U$. Como queremos uma φ tal que $\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}) \cap \varphi(U)$, então definimos

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ U \ &\longrightarrow \varphi(U) \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (u, v - f(u)) \end{aligned}$$

com $u \in \mathbb{R}^p$ e $v \in \mathbb{R}^{n-p}$.

Daí, $\varphi(z, f(z)) = (z, f(z) - f(z)) = (z, 0)$. Portanto, $\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}) \cap \varphi(U)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Consideraremos $x = (u, v) \in \mathbb{R}^n$, com $u \in \mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^{n-p}$. Como $dF(x_0)$ é sobrejetiva, podemos supor (se necessário fazer uma mudança de variável) que $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ é bijetora (olhar a matriz jacobiana para melhor vizualização).

Pelo Teorema da Função Implícita, existe

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-p} \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

tal que, se $F(x) = 0$ então $x = (u, f(u))$, de onde obtemos o desejado.

$Def. \Rightarrow (ii)$: Seja $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ dada pela definição. Temos que $\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}) \cap \varphi(U)$.

Seja $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}, (u, v) \longmapsto v$ projeção e consideremos $F = \pi \circ \varphi$. Se $x \in U \cap M$, então $\varphi(x) = \varphi(u, v) = (z, 0)$ e assim, $F(x) = \pi(z, 0) = 0$. Temos que F é C^∞ pois π e φ são C^∞. Além disso,

$$dF(x_0) = d\pi(\varphi(x_0)) \circ d\varphi(x_0).$$

Como $d\pi(\varphi(x_0))$ é sobrejetiva e $d\varphi(x_0)$ é bijetora, então $dF(x_0)$ é sobrejetiva.

Observação 7.9. *Sendo $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_{n-p}(x))$, para verificar que $dF(x_0)$ é sobrejetora, basta que $dF_1(x_0), \ldots, dF_{n-p}(x_0)$ sejam linearmente independentes.*

$(i) \Rightarrow (iii):$ Seja f tal que $U \cap M = \{(z, f(z))\ ;\ z \in \mathbb{R}^p\} \cap U$. Seja $h : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $h(u) = (u, f(u))$. Consideremos $V = h^{-1}(U)$. A aplicação j será dada por

$$\begin{aligned} j : &V \longrightarrow U \cap M \\ &u \longmapsto (u, f(u)). \end{aligned}$$

Temos que j é bijeção por construção e além disso, sendo u tal que $j(u) = x_0$, temos que $dj(u)$ é injetora pois é o gráfico de uma função. Além disso, é possível mostrar (fica a cargo do leitor) que j é bicontínua.

$(iii) \Rightarrow (i):$ Deixamos como exercício para o leitor juntar as seguintes informações para terminar a prova: Dado $x \in V, j(x) = (u(x), v(x))$ com $u : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e $v : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$. Usar o Teorema da aplicação aberta mais Projeção.

$\square$

Exemplos 7.10.

(1) *No* $\mathbb{R}^n$

A esfera é uma subvariedade de dimensão $p = n - 1$.

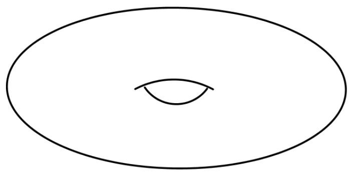
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \| x \| = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \| x \|^2 = 1\}.$$

Seja

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-(n-1)} = \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto F(x) = \| x \|^2 - 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - 1 \end{aligned}$$

Temos que $S = F^{-1}(\{0\})$, *e além disso,* $dF(x)$ *é sobrejetora para todo* $x \in F^{-1}(\{0\}) = S$, *visto que* $dF(x)(h) = \langle \nabla F(x), h \rangle = \langle (2x_1, \ldots, 2x_n), h \rangle = 2\langle x, h \rangle$, *e como* $x \in S$ *é tal que* $x \neq 0$, *então* $dF(x) \neq 0$, *portanto* $dF(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é sobrejetora, para todo* $x \in S$.

(2) *(Exercício) Em* $\mathbb{R}^3$, *o Toro é uma subvariedade de dimensão 2.*



Considere

$$\begin{array}{rcl} j: \quad \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\alpha) & \longmapsto & ((r-\rho\cdot cos\theta)\cdot sen\alpha, (r-\rho\cdot cos\theta)\cdot cos\alpha, \rho\cdot sen\theta), \end{array}$$

$\rho < r$. *É evidente que* j *não é injetora, para isso basta restringir adequadamente o domínio a um aberto* U *fazendo essa restrição ser injetora.*

7.1.1 Espaço Tangente

Definição 7.11. *Seja* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *uma subvariedade de dimensão* p. *Seja* $x_0 \in M$ *e* φ *uma carta local para* x_0. *Então o* ***espaço tangente*** *a* M *em* x_0 *é o espaço vetorial definido por*

$$T_{x_0}M = d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}).$$

Questão 7.12. $T_{x_0}M$ *não depende da escolha da carta.*

Observação 7.13. *Outras formas equivalentes de ver o espaço tangente:*

(1) ***(gráficos)*** *Localmente,* M *é o gráfico* $\{(z, f(z)) : z \in \mathbb{R}^p\}$.

$$T_{x_0}M = \{(z, df(x_0)(z)) : z \in \mathbb{R}^p\}.$$

(2) ***(equação)*** *Localmente,* $M = F^{-1}(\{0\})$.

$$T_{x_0}M = Ker(dF(x_0)).$$

(3) ***(parametrização)*** $T_{x_0}M = dj(0)(\mathbb{R}^p) = Im(dj(0))$.

Exemplos 7.14.

(1) $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \| x \| = 1\} = F^{-1}(\{0\})$.

$$F(x) = \| x \|^2 - 1 = \langle x, x\rangle - 1$$

$$dF(x_0)(h) = \langle 2x_0, h\rangle$$

$$Ker(dF(x_0)) = \{h \ : \ \langle 2x_0, h\rangle = 0\} = \{h \ : \ h \perp x_0\} = \{x_0\}^{\perp}.$$

Teorema 7.15. *Seja* M *uma subvariedade. O espaço tangente* $T_{x_0}M$ *é o espaço vetorial de todos os vetores velocidade em* $t = 0$ *dos caminhos* C^∞ *em* M *que passam por* x_0 *em* $t = 0$.

Demonstração. Exercício! □

7.2 Subvariedade com Bordo

Consideremos $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 \geqslant 0\}$.

Definição 7.16. *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que M é uma subvariedade com bordo se $\forall x, \exists \varphi$ difeomorfismo C^∞ e uma vizinhança U tal que, $\varphi(x_0) = 0$ e*
(i) $\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}) \cap \varphi(U)$ ou
(ii) $\varphi(U \cap M) = (\mathbb{H}^p \times \{0\}^{n-p}) \cap \varphi(U)$.

É possível mostrar que não pode acontecer (*i*) *e* (*ii*) *ao mesmo tempo!*

Chamamos de **bordo** de M e denotamos por ∂M o conjunto dos x_0 correspondentes ao caso (ii).

Observação 7.17.

(1) *Como já mencionado acima, os casos* (*i*) *e* (*ii*) *não podem acontecer ao mesmo tempo.*

(2) *Em geral, o bordo ∂M não é a fronteira de M. Se dim $M < n =$ dim $\mathbb{R}^n$, então $fr(M) = M$. Se dim $M =$ dim $\mathbb{R}^n = n$ e M é fechado, então $\partial M = fr(M)$, onde $fr(M)$ é a fronteira de M.*

Exemplos 7.18. *Em $\mathbb{R}^3$*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geqslant 0\},$$

é uma subvariedade com bordo, em que $\partial C = \{(x, y, 0) \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$.

Teorema 7.19. *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $F \ : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p+1}$ tal que $M = F^{-1}(\mathbb{R}_+ \times \{0\}^{n-p})$, $dF(x)$ é sobrejetora para todo x em $F^{-1}(\{0\})$, e $d(\pi \circ F)(x)$ é sobrejetora para todo x em $F^{-1}(\mathbb{R}_+^* \times \{0\}^{n-p})$, onde $\pi : \mathbb{R}^{n-p+1} \to \mathbb{R}^{n-p}$ é a projeção nas $n - p$ últimas coordenadas. Então, M é uma subvariedade com bordo e $\partial M = F^{-1}(\{0\})$.*

Agora definiremos o suporte de uma função.

Definição 7.20. *Definimos o* ***suporte*** *de f como o conjunto supp$(f) = \overline{\{x \ : \ f(x) \neq 0\}}$.*

Teorema 7.21. *Seja M uma subvariedade e $(U_i)_{i \in I}$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma família $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funções C^∞ ($M \to \mathbb{R}$) tais que*
(i) $\forall j \in \mathbb{N}, \ \exists i$ tal que supp$(\rho_j) \subseteq U_i$;
(ii) $\forall j \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant \rho_j(x) \leqslant 1$ para todo $x \in M$;
(iii) $\forall x \in M$, $\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j(x) = 1$;
(iv) $\forall x \in M$, existe uma vizinhança V tal que essa vizinhança só intersecta um número finito de supp(ρ_j).

8 Formas Diferenciáveis

8.1 Formas Diferenciais

Para introduzir o conceito de formas diferenciais, vamos inicialmente relembrar algumas definições.

Definição 8.1. *O simbolo de Kronecher* $\delta_{i,j} = \begin{cases} \text{0, se } i \neq j \\ \text{1, se } i = j \end{cases}$

Definição 8.2. $\sigma(p)$ *simboliza o grupo de permutações de* p *elementos.*

$\sigma(p) = p!$ indica a cardinalidade da permutação σ

Definição 8.3. *Uma transposição é uma permutação de dois elementos.*

O sinal de uma permutação σ é dado por:

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} \text{1, se o número de transposição é par} \\ \text{-1, se o número de transposição é ímpar} \end{cases}$$

Outras definições necessárias se refere ao estudo de espaços vetoriais.

Seja E um espaço vetorial em $\mathbb{R}$.

Definição 8.4. *As transformações lineares de* E *em* $\mathbb{R}$ *são chamadas de formas lineares.*

Definição 8.5. *O espaço das formas lineares é chamado de dual de* E *e notado por* E^*.

Proposição 8.6. *Se dim* $E = n$ *então dim* $E^* = n$

Demonstração. Precisamos provar que se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ base do E então $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ é uma base do E^*, com

$$e_i^* : E \longrightarrow R$$

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

Afirmação: $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ *é gerador do* E^*.

Seja $f \in E^*$, precisamos encontrar α_i tal que

$$f = \sum \alpha_i e_i^*$$

$$f(e_j) = \sum \alpha_i e_i^*(e_j) = \alpha_j$$

$$f = \sum f(e_i) e_i^*$$

Portanto, $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ é gerador.

Afirmação: $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ *é Linearmente independente*
Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*\right)(e_j) = 0(e_j) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j, \forall j = 1, \cdots, n$$

Portanto, $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ é Linearmente independente

□

Definição 8.7. *Diz-se que* $\alpha : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma forma* $k-$*linear se* $\alpha(v_1, \cdots, v_{i-1}, u + \lambda v, v_{i+1}, \cdots, v_k) = \alpha(v_1, \cdots, u, \cdots, v_k) + \lambda\alpha(v_1, \cdots, v, \cdots, v_k)$, $\forall v_1, \cdots, v_k, u, v \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \cdots k$. *Ou seja, linear em cada variável.*

O espaço das formas $k-$linear é notado por $(E^*)^{XK}$

Definição 8.8. *Dizemos que* α *é uma forma* $k-$ *linear alternada ou antissimetrica se é* $k-$ *linear e* $\alpha(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) = -\alpha(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k)$.

O espaço das formas $k-$ lineares alternadas é notado por $\wedge^k(E^*)$.

Observação 8.9. *Seja* $\alpha \in \wedge^k(E^*)$ *e* ε *uma transposição, então:*

(i) $\alpha(v_{\varepsilon(1)}, \cdots, v_{\varepsilon(k)}) = -\alpha(v_1, \cdots, v_k)$

(ii) *Seja* $\sigma \in \sigma(k)$ *então* $\sigma(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\alpha(v_1, \cdots, v_k)$

Observação 8.10. $\alpha(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots, v_k) = 0$

Observação 8.11. *Se dim* $E < k$ *então* $\forall \alpha \in \wedge^k(E^*)$ *temos* $\alpha = 0$

Observação 8.12. *As formas lineares, ou seja,* $1-$ *linear são alternadas, isto é,* $E^* = \wedge^1(E^*)$.

Exemplo 8.13. *Seja* E *tal que dim* $E = n$. *Seja* $\beta = \{e_1, \cdots, e_n\}$ *base de* E, *então* $det_\beta(v_1, \cdots, v_n)$ *é uma forma* $n-$ *alternada.*

Definição 8.14. *Seja* $\alpha \in (E^*)^{XK}$ *definimos a projeção* P *como sendo*

$$P(\alpha)(v_1, \cdots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \sigma(k)} \varepsilon(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})$$

.

e $P(\alpha) \in \wedge^k(E^*)$.

Definição 8.15. *Seja* $\alpha \in \wedge^k(E^*)$ *e* $\beta \in \wedge^p(E^*)$, *o produto exterior de* α *e* β *notado* $(\alpha \wedge \beta)$ *é definido por*

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \cdots, v_{k+p}) = \frac{(k+p)!}{k!p!} P(\alpha\beta)(v_1, \cdots, v_{k+p})$$

$$= \frac{1}{k!p!} \sum \varepsilon(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+p)})$$

$$= \sum_{\sigma \in A} \varepsilon(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+p)})$$

A é o conjunto das permutações tal que $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_k$ *e* $\sigma_{k+1} < \sigma_{k+2} < \cdots < \sigma_{k+p}$

$$= \sum \delta_{i_2 \cdots k+p}^{i_1 \cdots i_k > \delta_1 \cdots \delta_p} \alpha(v_{i_1}, \cdots, v_{i_k})\beta(v_{j_1}, \cdots, v_{j_k})$$

com $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq k+p$ *e* $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq k+p$

Proposição 8.16. *Seja* $\alpha \in \wedge^k(E^*)$ *e* $\beta \in \wedge^p(E^*)$ *então* $\alpha \wedge \beta \in \wedge^{k+p}(E^*)$

Exemplo 8.17. *Sejam* $v_1, v_2 \in E$ *e* $e_1^*, e_2^* \in \wedge^1(E^*)$.

Façamos o produto exterior entre e_1^* *e* e_2^*.

$$(e_1^* \wedge e_2^*)(v_1, v_2) = \sum_{\sigma \in \sigma(2)} \varepsilon(\sigma) e_1^*(v_{\sigma(1)}) e_2^*(v_{\sigma(2)})$$

$$= e_1^*(v_1)e_2^*(v_2) - e_1^*(v_2)e_2^*(v_1)$$

$$= det(e_i^*(v_j))$$

com $i = 1, 2$ *e* $j = 1, 2$.

Exemplo 8.18. *Sejam* $v_1, v_2, v_3 \in E$ *e* $e_1^*, e_2^*, e_3^* \in \wedge^1(E^*)$.

Façamos o produto exterior entre e_1^*, e_2^* *e* e_3^*

$$(e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*)(v_1, v_2, v_3) = \sum_{\sigma \in \sigma(2)} \varepsilon(\sigma) e_1^*(v_{\sigma(1)}) e_2^*(v_{\sigma(2)}) e_3^*(v_{\sigma(3)})$$

$$= e_1^*(v_1)e_2^*(v_2)e_3^*(v_3) - e_1^*(v_1)e_2^*(v_3)e_3^*(v_2) -$$

$$-e_1^*(v_2)e_2^*(v_1)e_3^*(v_3) + e_1^*(v_2)e_2^*(v_3)e_3^*(v_1) +$$

$$+e_1^*(v_3)e_2^*(v_1)e_3^*(v_2) - e_1^*(v_3)e_2^*(v_2)e_3^*(v_1)$$

$$= det(e_i^*(v_j))$$

com $i = 1, 2, 3$ *e* $j = 1, 2, 3.$

Proposição 8.19. *Seja* $\alpha \in \wedge^k(E^*)$ *e* $\beta \in \wedge^p(E^*)$, *então:*

(i) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

(ii) $\beta \wedge \alpha = (-)^{kp} \alpha \wedge \beta$

Teorema 8.20. *O espaço vetorial* $\alpha \in \wedge^k(E^*)$ *tem como base os elementos* $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$, *com* $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. *Em particular, dim* $\wedge^k(E^*) = C_n^k$.

Demonstração. Seja $\alpha \in \wedge^k(E^*)$ e $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$ uma $k-$upla.
Para conhecer α, precisamos conhecer $\alpha(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$, com $i_1, \cdots, i_k = 1, \cdots n$. Mas se temos dois índices iguais então $\alpha(e_{i_1}, \cdots, e_{i_1}, \cdots e_{i_k}) = 0$. Se trocarmos dois elementos trocamos o sinal, então só precisamos conhecer $\alpha(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$ com $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Podemos mostrar que $\alpha = \sum \alpha(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$.
Seja $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$, assim

$$\sum \alpha(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \alpha(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k})$$

pois,

$$e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) =$$

$$\begin{cases} 1, \text{ se } i_1 = \delta_1, i_2 = \delta_2, \cdots, i_k = \delta_k \\ 0, \text{ se não} \end{cases}$$

isso implica que $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$ são linearmente independentes, e então

$$\alpha = \sum \alpha(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$$

e $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$ com $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ é uma base do $\wedge^k(E^*)$.

$\square$

Questão 8.21. *Provar que se M é uma sub-variedade conexa por arcos de dimensão 2 se $x \in M$, $M \setminus \{x\}$ é conexo.*

Questão 8.22. *Seja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Provar que C não é uma subvariedade.*

Observação 8.23. *Se $dim E = n$ com $e_1, \cdots, e_n$ uma base, então $dim \wedge^r(E^*) = C_n^n = 1$.*

A $n-$forma $e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$ gera o espaço $\wedge^r(E^*)$.

Observação 8.24. *Se $\alpha \in \wedge^r(E^*)$, então $\alpha = \lambda e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$ (α é chamada de volume). $e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*(v_1, \cdots, v_n) = det_\beta(v_1, \cdots, v_n)$.*

Observação 8.25. *Quando $E = \mathbb{R}^n$, $(e_1, \cdots, e_r)$ é a base canônica.*

Observação 8.26. *Seja $f : K^n \longrightarrow K$ um funcional linear, então:*

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

onde $(e_1, \cdots, e_r)$ é a base canônica de K^n. Todo funcional linear sobre K^n é da forma:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

onde $a_i \in K$, $i = 1, \cdots, n$ e $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ é a matriz de f em relação à base canônica de K^n e à base $\{1\}$ de K.

Definição 8.27. *Seja $f : E \longrightarrow F$ uma transformação linear. Definimos f^* (ou $\wedge^k(f)$) por:*

$$\wedge^f : \wedge^k(F) \longrightarrow \wedge^k(E)$$

$$\alpha \longmapsto \wedge^k(f)(\alpha) = f^*(\alpha)$$

$$\wedge^k(f)(\alpha)(v_1, \cdots, v_k) = \alpha(f(v_1), \cdots, f(v_k))$$

Propriedades:

(a) $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$

(b) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

Demonstração.

(a) Sabe-se que $\alpha \wedge \beta = \frac{(k+p)!}{k!p!} P(\alpha\beta)$. Então:

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^* \left(\frac{(k+p)!}{k!p!} \right) P(\alpha\beta)) = \frac{(k+p)!}{k!p!} f^* \left(P(\alpha \wedge \beta) \right) = \frac{(k+p)!}{k!p!} P \left(f^*(\alpha \wedge \beta) \right)$$

Vamos admitir aqui que a terceira igualdade é válida. Daí, temos que:

$$\begin{gathered} f^*(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2, \cdots, v_k) = (\alpha\beta)(f(v_1), \cdots, f(v_k)) \\ = \alpha(f(v_1), \cdots, f(v_k))\beta(f(v_1), \cdots, f(v_k)) \\ f^*(\alpha)(v_1, v_2, \cdots, v_k) f^*(\beta)(v_1, v_2, \cdots, v_k) \end{gathered}$$

Logo,

$$\frac{(k+p)!}{k!p!} P \left(f^*(\alpha \wedge \beta) \right) = \frac{(k+p)!}{k!p!} P(f^*(\alpha) f^*(\beta)) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$$

Aqui termina a demonstração. Vamos verificar a veracidade da terceira igualdade, que foi tomada como verdadeira para concluir este resultado.

Precisamos verificar que: $f^*(P(\alpha)) = P(f^*(\alpha))$

$$f^*(P(\alpha))(v_1, \cdots, v_k) = f^* \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \sigma(k)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) \right)$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \sigma(k)} \varepsilon(\sigma) f^* \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \sigma(k)} \varepsilon(\sigma) \alpha(f(v_{\sigma(1)}, \cdots, f v_{\sigma(k)}))$$

$$P f^*(\alpha)(v_1, \cdots, v_k) = P(f^*(\alpha))$$

□

Demonstração.

(b) A cargo do leitor □

8.1.1 Formas Diferenciais

Definição 8.28. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $k \in [1, \cdots, n]$. Uma forma diferencial é uma aplicação C^∞ $\alpha : U \longrightarrow \wedge^k(E^*)$. Ou seja ($\forall x \in U, \alpha(x)$ é uma forma $k - linear$).*

O espaço das $k - formas$ diferenciais é notado por $\Omega^k(U)$.

Observação 8.29.

$$\alpha(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \cdots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

com $\alpha_{i_1, \cdots, i_k} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞.

Exemplo 8.30. $\alpha(x, y, z) = xydx + zdy$ *é uma 1-forma diferencial no* $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 8.31. $\alpha(x, y, z) = xydx \wedge dy + zdx \wedge dy$ *é uma 2-forma diferencial no* $\mathbb{R}^3$.

Observação 8.32. $\Omega^k(U)$ *é um espaço vetorial.*

(i) $(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)(x) = a_1\alpha_1(x) + a_2\alpha_2(x)$, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x)$

Definição 8.33. *Sejam* $f : U \longrightarrow V$ *uma função* C^∞, $U \subset \mathbb{R}^n$ *e* $V \subset \mathbb{R}^p$. *Definimos:* $f^* : \Omega^k(V) \longrightarrow \Omega^k(U)$ *como:*

$$f^*(\alpha)(x) = \wedge^k(df_x)(\alpha(f(x)))$$

$$= f^*(\alpha)(x)(v_1, \cdots, v_k) = \alpha(f(x))(df_x(v_1), \cdots, df_x(v_k))$$

$$= \alpha(f(x))(df(x)(v_1), \cdots, df(x)(v_k))$$

Exemplo 8.34. *Seja* $\alpha(x) = g(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ *e* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *um difeomorfismo. Calculemos* $f^*(\alpha)(x)(v_1, \cdots, v_k)$.

$$f^*(\alpha)(x)(v_1, \cdots, v_k) = \alpha(f(x))(df_x(v_1), \cdots, df_x(v_k))$$

$$= g(f(x))dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n((df(x)(v_1), \cdots, df(x)(v_k))$$

$$= g(f(x))det(J_f(x)v_1, \cdots, J_f(x)v_n$$

$$= g(f(x))det(J_f(x))det(v_1, \cdots, v_k)$$

$$= g(f(x))det(J_f(x))dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(v_1, \cdots, v_k)$$

$$f^*(\alpha(x)) = g(f(x))det(df(x))dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

8.2 Diferencial Exterior

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. α é uma k-forma diferencial.

$$\alpha : U \to \wedge^k(E^*), C^\infty \ \alpha \in \Omega^k(U)$$

Seja $f : U \to V, C^\infty$. Temos $f^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ tal que $f^*(\alpha)(x)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(f(x))(df(x)v_1, \ldots, df(x)v_k)$.

Observação 8.35. • *Convenção:* $\wedge^0(E^*) = \mathbb{R}$

$$\Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$$

Definição 8.36. *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *aberto. Seja* $\alpha \in \Omega^k(U)$ *tal que* $\alpha(x) = g(x)d_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_{i_k}$ $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. *A diferencial exterior de* α *(Notação:* $d\alpha$*) é a* $(k+1)$*-forma diferencial definida por:*

$$d\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Caso Geral:

$$\alpha(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \ldots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\alpha(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{i_1, \ldots, i_k}}{\partial x_i}(x) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Exemplo 8.37. *Em* $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha(x, y, z) = xydx + z^2dy + (x + y + z)dz,$$

α *é* 1*-forma diferencial.*

$$d\alpha(x, y, z) = ydx \wedge dx + 0dx \wedge dy + dx \wedge dz + xdy \wedge dx + 0dy \wedge dy + dy \wedge dz + 0dz \wedge dx + 2zdz \wedge dy =$$

$$= dx \wedge dz - xdx \wedge dy + (1 - 2z)dy \wedge dz,$$

$d\alpha$ *é uma* 2*-forma.*

Exemplo 8.38. *Em* $\mathbb{R}^3$. *Sendo* α *uma* 1*-forma dada por* $\alpha = adx + bdy + cdy$, *temos que*

$$d\alpha = \left(\tfrac{\partial b}{\partial x} - \tfrac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\tfrac{\partial c}{\partial x} - \tfrac{\partial a}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\tfrac{\partial c}{\partial y} - \tfrac{\partial b}{\partial z}\right) dy \wedge dz.$$

Assim, temos

$$rot(a, b, c) = \left(\left(\tfrac{\partial b}{\partial x} - \tfrac{\partial a}{\partial y}\right), \left(\tfrac{\partial c}{\partial x} - \tfrac{\partial a}{\partial z}\right), \left(\tfrac{\partial c}{\partial y} - \tfrac{\partial b}{\partial z}\right)\right).$$

Exemplo 8.39. *Em* $\mathbb{R}^3$. *Sendo* α *uma* 2*-forma tal que* $\alpha = cdx \wedge dy + bdz \wedge dx + ady \wedge dz$, *temos que*

$$d\alpha = \left(\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial x}\right).$$

Assim, temos

$$div(a,b,c) = \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Teorema 8.40. a) $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ *linear.*

b) $d(d\alpha(x)) = 0$

c) $d(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge d\beta + (-1)^{gral(\alpha)} d\alpha \wedge \beta$

d) *Sejam* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *abertos e* $f : U \to V$ *de classe* C^∞, *temos* $d(f^*(\alpha)) = f^*(d\alpha)$.

Demonstração. a) Imediato.

b) Seja $\alpha(x) = f(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Temos que

$$d\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} =$$

$$= \sum_{1<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = 0,$$

pois $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = 0$ pelo teorema de Schwarz.

c) Sejam $\alpha(x) = f(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ e $\beta(x) = g(x)dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$. Temos

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x) = f(x)g(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}.$$

Assim,

$$d(\alpha \wedge \beta)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i}(x) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) + f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge g(x) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$$

$$+\sum_{i=1}^{n} f(x)dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$$

$$= d\alpha \wedge \beta + \sum_{i=1}^{n}(-1)^k f(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$$

$$= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

d) Seja $g \in \Omega^0(U)$. Temos $f^*(g)(x) = g(f(x))$, assim

$$d(g(f(x)))(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(g(f(x)))}{\partial x_i} dx_i(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) dx_i \right)(v) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(x)) \right) dx_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \cdot v \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(x)) dx_i \right) (J_f(x) \cdot v).$$

Então

$$f^*(dg(x))(v) = f^* \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx_i \right)(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(x)) dx_i \right)(df(x) \cdot v) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(x)) dx_i \right)(J_f(x) \cdot v).$$

Seja ω $k+1$-forma então podemos achar $\alpha \in \Omega^0(U)$ e $\beta \in \Omega^k(U)$ tal que $\omega = \alpha \wedge d\beta$. Vamos supor que $df^*(\gamma) = f^*(d(\gamma))$ para $\gamma \in \Omega^k(U)$. Assim,

$$d(f^*(\omega)) = d(f^*(\alpha \wedge d\beta)) = d(f^*(\alpha) \wedge f^*(d\beta)) = df^*(\alpha) \wedge f^*(d\beta) + (-1)^G f^*(\alpha) \wedge d(f^*(d\beta)) =$$

$$= f^*(d(\alpha)) \wedge f^*(d\beta) + f^*(\alpha) \wedge f^*(d(d\beta)) = f^*(d\alpha \wedge d\beta) = f^*(d\omega).$$

□

8.3 Formas Diferenciais em Variedades

Definição 8.41. *Dizemos que α é uma forma exata se existe β tal que $d\beta = \alpha$. Dizemos que α é uma forma fechada se $d\alpha = 0$.*

Proposição 8.42. *Se α é uma forma exata, então α é fechada.*

Demonstração. Seja α uma forma exata. Então, por definição, temos que existe β tal que $d\beta = \alpha$. Assim, temos que $d\alpha = d(d\beta) = d \circ d(\beta) = 0$. □

Definição 8.43. *Seja M uma variedade. Uma k-forma diferencial α é uma aplicação tal que para todo $x \in M, \alpha(x) \wedge^k (T_x^* M).(T_x^* M := (T_x M)^*$, dual do espaço tangente, chamado de espaço cotangente).*

A forma C^∞ se para toda carta local φ temos que $(\varphi^{-1})^*(\alpha)$ é C^∞. O espaços das k-formas diferenciais C^∞ em M é denotado por $\Omega^k(M)$.

Observação 8.44. *$(\varphi^{-1})^*(\alpha)$ é C^∞ quer dizer que a forma*

$$(\varphi^{-1})^*(\alpha)(x)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(\varphi^{-1}(x))(d\varphi_x^{-1} v_1, \ldots, d\varphi_x^{-1} v_k)$$

tem coeficiente C^∞.

Definição 8.45. *Sejam M e N variedades. Seja $f \in C^\infty(M, N)$*

$$f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$$
$$f^*(\alpha)(x)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(f(x))(df_x(v_1), \ldots, df_x(v_k)).$$

Definição 8.46. *Seja M uma variedade com atlas (U_i, φ_i). Seja (ρ_i) uma partição da unidade subordinada aos $U_{i's}$.*

Definimos a diferencial exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$.

$$d\alpha = \sum_i \varphi_i^* d(\varphi_i^{-1*}(\rho_i \alpha)).$$

Teorema 8.47. a) $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

b) $d \circ d = 0$

c) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{grau(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$

d) $d(f^* \alpha) = f^*(d\alpha), f \in C^\infty(M, N)$.

8.4 Variedade com Bordo

Definição 8.48. *Seja E um espaço vetorial. Seja B_1 e B_2 base de E. Seja A a matriz mudança de base de B_1 para B_2 ($A = (Id_{B_2}^{B_1})$, escrevemos a base B_1 na base B_2). Se $det A > 0$, dizemos que B_1 e B_2 tem a mesma orientação.*

No $\mathbb{R}^n$, dizemos que B_1 tem orientação positiva se B_1 tem a mesma orientação da base canônica.

Definição 8.49. *Seja M uma variedade. Dizemos que M é uma variedade orientável se para todo par de cartas φ_1, φ_2 definimos numa mesma vizinhança V de x_0,temos $det \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2(x_0) > 0$.*

A escolha do atlas é chamada de escolha da orientação.

Definição 8.50. *Uma orientação dos espaços tangentes* T_xM *é dita contínua se para cada* n*-uplas de campos vetoriais contínuas* $(X_1(x), \ldots, X_n(x))$ *definidos numa vizinhança* V *de* x_0 *tal que* $(X_1(x_1), \ldots, X_n(x_n))$*é uma base do* $T_{x_0}M$*, então* $(X_1(x), \ldots, X_n(x))$ *é uma base de* T_xM *com a mesma orientação para todo* $x \in V$*.*

Teorema 8.51. M *é uma variedade orientável se, e somente se, os espaços tangentes tem uma orientação contínua.*

Exemplo 8.52. *A faixa de Mobius não é orientável.*

$$F(r, \theta) = ((1 + r\cos(\theta/2))\cos(\theta), (1 + r\cos(\theta/2))\sin(\theta), r\sin(\theta/2))$$

$$M = \{F(r, \theta); 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}\}.$$

Demonstração. Exercício. □

Proposição 8.53. *Se* M *é uma variedade orientável com bordo, então* ∂M *é uma variedade orientável.*

8.5 Integrais de Formas Diferenciais

Definição 8.54. *Seja* α *uma* n*-forma diferenciável do* $\mathbb{R}^n$ *com suporte compacto. Sendo* $\alpha(x) = f(x)dx_1 \wedge dx_n$*, tem-se*

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \cdots dx_n \text{ (integral comum).}$$

Teorema 8.55. *Seja* α *uma* n*-forma diferencial em* $\mathbb{R}^n$ *com suporte compacto. Seja* φ *um difeo do* $\mathbb{R}^n$ *preservando a orientação. Então*

$$\int \varphi^*\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(x)) det d\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int \alpha.$$

Definição 8.56. *Seja* M^k *uma variedade orientável com* (U_i, φ_i) *atlas. Seja* (ρ_i) *partição da unidades subordinada aos* $U_{i's}$*. Seja* $\alpha \in \Omega^k(M)$

$$\int_M \alpha = \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} \varphi_i^{-1*}(\rho_i\alpha).$$

Observação 8.57. *Essa definição não depende de* φ_i, U_i, ρ_i*.*

Exemplo 8.58. *Seja* $M = C$ *caminho em* $\mathbb{R}^2$*.*

Demonstração. Temos que $dimM = 1$. Seja α uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(x,y) = f(x,y)dx + g(x,y)dy$. Seja $\gamma : [0,1] \to C \subset \mathbb{R}^2$ tal que $t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Seja ainda $\varphi : C \to [0,1] \subset \mathbb{R}$, onde $\varphi = \gamma^{-1}$, então $\varphi^{-1*}\alpha = \gamma^*\alpha$. Desta forma, vamos ter que

$$(\gamma^*\alpha)(t)(v) = \alpha(\gamma(v))(d\gamma_t(v)) = \alpha(\gamma(v))(\gamma_1'(t) \cdot v, \gamma_2'(t) \cdot v) = \alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t))(\gamma_1'(t) \cdot v, \gamma_2'(t) \cdot v)$$
$$= f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))dx + g(\gamma_1(t), \gamma_2(t))dy.$$

Assim,

$$(\gamma^*\alpha)(t)(v) = (f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))dx + g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))(\gamma_1'(t) \cdot v, \gamma_2'(t) \cdot v) =$$
$$= f(\gamma(t))\gamma_1'(t) \cdot v + g(\gamma(t))\gamma_2'(t) \cdot v = (f(\gamma(t))\gamma_1'(t) + g(\gamma(t))\gamma_2'(t)) \cdot v = \omega(t)(v) = h(t)dt(v),$$

onde $\omega(t) \in \wedge^1(\mathbb{R}^*)$. Assim, temos $\omega(t) = h(t)dt$ e $\gamma^*\alpha = h(t)dt$.

Portanto,

$$\int_C \alpha = \int_{[0,1]} \gamma^*\alpha = \int_{[0,1]} h(t)dt = \int_0^1 [f(\gamma(t))\gamma_1'(t) + g(\gamma(t))\gamma_2'(t)]dt.$$

Temos que a integral acima define a integral de linha do campo vetorial $(f(x,y), g(x,y))$ no caminho C. □

9 O Teorema de Stokes em Variedades

O objetivo desta seção é explicar o enunciado do Teorema de Stokes (ou teorema fundamental do cálculo para integrais em variedades) e demonstrá-lo. Este Teorema afirma o seguinte:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{6}$$

É importante salientar que na fórmula acima existe um abuso de notação ao escrever apenas a integral de ω. Formalmente devemos ter:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega$$

onde $i^*\omega$ é a restrição da ω ao ∂M, isto é, $i^*\omega$ é o pullback de ω pela inclusão $i : \partial M \to M$.

Na fórmula acima M é uma variedade de dimensão k (com $1 \leq k \leq n$) em $\mathbb{R}^n$ compacta com bordo ∂M. O bordo de uma k-variedade é uma variedade de dimensão $(k-1)$ que pode ser vista como uma espécie de "fronteira intríseca", ou seja, só é a fronteira quando a dimensão da variedade é n uma vez que a fronteira de uma variedade $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $k < n$ coincide com o seu fecho. Por exemplo, se $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ é o hemisfério superior de uma superfície esférica, $\partial M = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ é o equador.

9.1 Teorema de Stokes

Nesta seção, nossa meta será a demonstração do teorema de Stokes em variedades compactas e orientáveis, tendo o termo compacto o mesmo significado que o empregado na topologia geral, uma vez que uma variedade é um espaço topológico. E por este motivo todas as variedades consideradas a partir de agora serão compactas e orientáveis, salvo apenas menção contrária.

Teorema 9.1. ***(Partição da Unidade)***. *Sejam M uma variedade diferenciável compacta e orientável, e $\{V_\alpha\}$ uma cobertura de M por vizinhanças coordenadas. Então existem funções diferenciáveis $\varphi_1, \cdots \varphi_m$ tais que,*

(i) $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i = 1$;

(ii) $0 \leq \varphi_i \leq 1$ *e o suporte de φ_i está contido em algum V_{α_i} da cobertura $\{V_\alpha\}$;*

(iii) *Para todo $x \in M$, existe uma vizinhança U tal que essa vizinhança só intersecta um número finito de supp(φ_i), sendo supp$(\varphi_i) = \overline{\{x; \varphi_i(x) \neq 0\}}$.*

Definição 9.2. *Seja M uma variedade orientada com bordo e com dimensão n. Seja $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável que orienta M. Se n for par, então a orientação do bordo é aquela dada pela estrutura induzida $\{(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})\}$. Se n é ímpar então a orientação do ∂M é dada pelo oposto da estrutura induzida (trocando o sinal da primeira função coordenada de cada φ_α). Esta orientação é chamada de orientação de Stokes no ∂M.*

Observação 9.3. *A orientação de $\mathbb{R}^n$ canônica é dada pela n-forma $d_{x_1} \wedge \cdots \wedge dx_n$ e a restrição dessa forma a $\mathbb{H}^n$ orienta o espaço modelo para variedades com bordo. Segue que a orientação de Stokes do ∂M é dada pela (n-1)-forma $(-1)^n d_{x_1} \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$.*

Definição 9.4. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos, e $g : U \to V$ uma função de classe C^∞. Dada uma $\omega \in \Omega^k(V)$, definimos $g^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$, com $g^*(\omega(x)) = wg(x)(D_g)$ como sendo **pullback** de ω por g.*

De algumas propriedades do pullback, ressaltamos aquela em que o mesmo comuta com a diferencial de uma forma.

Definição 9.5. *Chama-se semi-espaço em $\mathbb{R}^n$ ao conjunto*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 \leq 0\}.$$

Teorema 9.6. ***(Teorema de Stokes)***. *Dividiremos a demonstração em três passos: Primeiro vamos utilizar partições da unidade para o caso geral, depois consideraremos* *uma forma em uma variedade com suporte inteiramente contido em uma vizinhança coordenada, e por último demonstramos o caso $M = \mathbb{H}^n$. Seja M uma variedade com bordo, orientada e $\omega \in \Omega_C^{n-1}(M^n)$, então*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Demonstração. **Passo 1.** Vamos supor que ω é uma (n-1)-forma com suporte compacto na variedade orientada M e escolhemos uma coleção finita $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de vizinhanças coordenadas que orientam M e que cobrem suppω.

Seja $\omega \in \Omega_C^{n-1}(M^n)$ e uma carta orientada $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{H}^n$, $\alpha \in \bigwedge$, e $\{\rho_\alpha\}$ partição subordinada a $\{U_\alpha\}$. Note que: $supp(\omega) \subset U_\alpha$. Então,

$$\int_M d\omega = \int_M d\left(\sum_\alpha \rho_\alpha \omega\right) = \sum_\alpha \int_M d(\rho_\alpha \omega) = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} d(\rho_\alpha \omega) \breve{=}$$

$$\breve{=} \sum_\alpha \int_{\partial U_\alpha = \partial M \cap U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_{\partial M} \rho_\alpha \omega = \int_{\partial M} \left(\sum_\alpha \rho_\alpha\right) \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Passo 2. Suponhamos agora que M é uma variedade diferenciável e que ω é uma (n-1)-forma tal que o supp $\omega \subset U$, onde (U, φ) orienta M.

Basta ver então para $\omega \in \Omega_C^{n-1}(U)$ e $\varphi : U \to \mathbb{H}^n$ carta orientada. Por definição,

$$\int_U d\omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* d\omega = \int_{\varphi(U)} d(\varphi^{-1})^* \omega \breve{=}$$

já que o pullback e o operador d comutam.

$$\breve{=} \int_{\partial\varphi(U) = \varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^* \omega = \int_{\varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n = \varphi(\partial U)} i^* (\varphi^{-1})^* \omega = \int_{\varphi(\partial U)} (\varphi^{-1} \circ i)^* \omega \hat{=}$$

$$\hat{=} \int_{\varphi|_{\partial U}(\partial U)} (\varphi|_{\partial U})^{-1*} \omega = \int_{\partial U} \omega.$$

Temos que $\hat{=}$ acontece pois φ é restrita a uma carta do bordo.

Passo 3. Suponhamos $M = H^n$

Agora, vamos fazer para $\mathbb{H}^n$. Temos $\omega \in \Omega_C^{n-1}(\mathbb{H}^n)$. Resta-nos mostrar

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \int_{\mathbb{H}^n} d\omega.$$

Se

$$\omega \in \Omega_C^{n-1}(\mathbb{H}^n) \text{ isso implica } \omega = \sum f_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$\text{isso implica } d\omega = \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

onde $df_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_j$.

Analisando apenas $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Então

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Vamos integrar primeiro em x_i $(T.F.C)$, então

$$\int \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int \int \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \hat{dx_i}.$$

O suporte da forma é compacto, então pegamos um cubo grande que contém um suporte desta função. Assim,

$$\int_{Q^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{Q^{n-1}} \int_{-A}^{A} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \hat{dx_i}$$

$$= \int_{Q^{n-1}} f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, A, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, -A, x_{i+1}, \ldots, x_n)(*).$$

Se integrarmos para $i < n$, o que acontece? Temos

$$(*) = \begin{cases} 0, i < n \\ -\int_{Q^{n-1}} f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{cases}$$

Daí

$$(-1)^n \int_{Q^{n-1}} f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = (-1)^n \int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega.$$

Isso conclui a demonstração do teorema de Stokes. □

9.2 Relação com os Teoremas Fundamentais do Cálculo Vetorial

Nesta seção final vamos explicitar a relação entre as integrais de formas e o Teorema de Stokes demonatrado na seção anterior e os Teoremas Fundamentais do Cálculo Vetorial.

O Teorema de Stokes é uma extenção direta do teorema de Green. Ele relaciona a integral de linha de um campo vetorial F ao longo de uma curva fechada C no $\mathbb{R}^3$ com a integral sobre uma superfície S da qual C é bordo, da seguinte forma:

$$\int\int_S (rotF \cdot n)ds = \int_{\partial S} F \cdot dr.$$

Teorema 9.7. ***(Teorema de Stokes)****Seja S uma superfífie orientada, parametrizada por $\varphi(u,v),(u,v) \in D$, onde D é uma região fechada e limitada do plano uv, limitada por uma curva C^1 por partes, e φ uma função de classe C^2 num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo D. Se $F = (F_1, F_2, F_3)$ é um campo vetorial de classe C^1, definido nun subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ que contém S, cujo bordo ∂S está orientado positivamente, então*

$$\int\int_S (rotF \cdot n)ds = \int_{\partial S} F \cdot dr.$$

Como vimos, o Teorema de Stokes expressa uma relação entre uma integral de superfície e uma integral de linha sobre a curva que é o bordo da superfície em questão.

O Teorema de Green trata-se de um resultado muito importante no estudo das integrais de linha, pois as relaciona com uma integral dupla sobre a região limitada pela curva a qual estamos considerando, da seguinte forma:

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \int\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy.$$

Teorema 9.8. ***(Teorema de Green)****. Seja D uma região fechada e limitada do plano xy, cuja fronteira ∂D está orientada positivamente e é parametrizada por uma função C^1 por partes, de modo que seja percorrida apenas uma vez (∂D será uma curva de Jordan). Se $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ é um campo vetorial de classe C^1 num subconjunto aberto que contém D, então*

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \int\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy.$$

Note que, se aplicarmos o teorema de Stokes à forma $F_1dx + F_2dy$ observando que $d(F_1dx + F_2dy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \frac{\partial F_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial F_2}{\partial x} dx \wedge dy$,
e que $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ chegaremos ao resultado desejado.

Exemplo 9.9. *Seja $F(x,y) = ((x^2)^{\sin x} - y)\vec{i} + ((\sin^2 y)^{\cos y} + x)\vec{j}$. Calcule a integral de F em relação a curva γ, dada por $\gamma : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.*

Demonstração. Como estamos com uma integral de linha sobre uma região fechada, então, neste caso, podemos usar o teorema de Green. No teorema de Green temos somente uma componente de bordo que é a externa, então a região de integração é o interior da elipse. Assim, temos que:

$$\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \int\int_{int(\gamma)} rot\vec{F} \cdot \vec{k}.$$

A questão nos pede integração no sentido horário, porém a integração por Green é no sentido anti-horário, então:

$$\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} = -\int\int_{int(\gamma)} 2dA = -2A(int(\gamma)) = -2\pi \cdot 2 \cdot 3 = -12\pi.$$

□

Exemplo 9.10. *Calcule a integral* $\int (x^6 - y)dx + ((\sin^2 y)^{\cos y} + x^2)dy$ *sobre o arco* γ*, sendo que* γ *é o arco de* $y = 4 - x^2$*,* $y \geq 0$*, ligando* $(-2, 0)$ *a* $(2, 0)$*.*

Demonstração. Neste caso não podemos de imediato usar o teorema de Green, uma vez que o mesmo só pode ser usando quando estamos integrando sobre uma região fechada, porém, podemos fechar a região pra podermos usar o teorema. Para isto, seja $D \subset \mathbb{R}^2$, a região com bordo $\alpha \cup (-\gamma)$. O sinal de menos aparece devido a orientação do arco da parábola. Assim, pelo teorema de Green:

$$\int_{\alpha\cup(-\gamma)} \vec{F}d\vec{r} = \int\int_D rot\vec{F} \cdot \vec{k} \Rightarrow \int_\alpha \vec{F}d\vec{r} - \int_\gamma \vec{F}d\vec{r} = \int\int_D rot\vec{F} \cdot \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{F}d\vec{r} = \int_\alpha \vec{F}d\vec{r} - \int\int_D rot\vec{F} \cdot \vec{k}.$$

Temos que calcular pela definição de integral de linha uma parte e a outra usaremos o teorema de Fubini. Assim, parao primeiro caso temos que parametrizar a curva α. Seja

$$\alpha(t) = (t, 0), -2 \leq t \leq 2 \Rightarrow \alpha^{'}(t) = (1, 0).$$

Assim,

$$\int_{-2}^{2} (t^6 \cdot 1 + 0)dt = \frac{t^7}{7}|_{-2}^{2} = \frac{256}{7}.$$

$$\int\int_D (2x+1)dA = \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} (2x+1)dydx = \int_{-2}^{2} (2x+1)y|_0^{4-x^2} dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (2x+1)(4-x^2)dx = \int_{-2}^{2} (4 + 8x - 2x^3 - x^2)dx = (4x - \frac{x^3}{3})|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

Portanto,

$$\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} = \frac{256}{7} - \frac{32}{3} = \frac{544}{21}.$$

□

O próximo teorema que iremos apresentar é o Teorema da divergência, ou Teorema de Gauss, que relaciona uma integral tripla com uma integral de superfície.

Teorema 9.11. ***(Teorema de Gauss)****. Seja W uma região fechada e limitada de $\mathbb{R}^3$ cuja fronteira ∂W é uma superfície orientada positivamente. Se F é um campo vetorial de classe C^1 num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ que contém W, então*

$$\int\int_{\partial W}(F\cdot n)ds = \int\int\int_{W} divF dxdydz.$$

Considerando em uma variedade M uma 2-forma definida por $\omega = F_1 dy\wedge dz + F_2 dz\wedge dx + F_3 dx\wedge dy$ tem-se $d\omega = divF dV$. Uitlizando algumas relações válidas em M e aplicando o teorema de Stokes, chegamos ao resultado esperado.

Exemplo 9.12. *Calcule $\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}ds$, sendo $\vec{F} = (x,y,z) = (x^3, [(\sin z)^2]^{\sqrt{z^2+1}}, y^2)$, sendo a superfície S o pedaço de $z = 4 - x^2 - y^2$, satisfazendo $z \geq 0$, com $\vec{n}$ que se afasta do eixo z.*

Demonstração. Como vamos utilizar do teorema da divergência, ou mais conhecido por teorema de **Gauss**, para resolver o exemplo acima, então inicialmente calculemos o divergente do campo F que é dado por $div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3x^2$. Se Observarmos a superfície veremos que a mesma não é fechada, então, não podemos aplicar o teorema de imediato, ou seja, devemos ter uma superfície fechada para para fazer tal ação. Para isto, seja S_1 uma superfície auxiliar dada por $S_1 : x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$ é o disco no plano xy, com normal $\vec{n_1} = -\vec{k}$.

Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ com $\partial V = S \cup S_1$. Aqui podemos aplicar o teorema de **Gauss**. Temos que $\int\int_V\int div\vec{F} = \int\int_{S\cup S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}ds$, então $\int\int_V\int div\vec{F} = \int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}ds + \int\int_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n_1}ds \Rightarrow$

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \int\int_V\int div\vec{F} - \int\int_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n_1}ds.$$

Vamos começar calculando a integral tripla. Desta forma, temos o seguinte:

$$\int\int_V\int 3x^2 dV.$$

Façamos uma mudança de variável.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r\sin\theta, 0 \leq r \leq 2 \\ z = z, 0 \leq z \leq 4 - r^2 \end{cases}$$

Como fizemos uma mudança de variável, temos que calcular o jacobiano, onde o mesmo é $Jac = r$. Assim, temos

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} 3r^2\cos^2\theta r dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3r\cos^2\theta z|_0^{4-r^2} drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (12r^3\cos^2\theta - 3r^5\cos^2\theta)drd\theta = \pi(3r^4 - \frac{r^6}{2})|_2^0 = 16\pi.$$

Agora é resolvr a integral dupla sobre S_1.

$$\int\int_{S_1} \vec{F}\vec{n}ds$$

Parametrizando S_1, temos

$$S_1 : \begin{cases} x = r\cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r\sin\theta, 0 \leq r \leq 2 \\ z = 0. \end{cases}$$

Temos também

$$\vec{X_\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0), \vec{X_r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \vec{X_\theta} \wedge \vec{X_r} = (0, 0, -r).$$

Assim,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 [0 + 0 + r^2\sin^2\theta(-r)]drd\theta = \pi(-\frac{r^2}{4})|_0^2 = -4\pi.$$

Portanto,

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n} = \int\int_V\int div\vec{F} - \int\int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n_1} = 16\pi - (-4\pi) = 20\pi.$$

□

Outras consequências do teorema de Stokes são os seguintes corolários.

Corolário 9.13. *Suponha que M seja uma variedade diferencial compacta, orientável e com bordo. Se $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ é fechada, então*

$$\int_{\partial M} \omega = 0$$

Corolário 9.14. *Suponha que M seja uma variedade diferencial compacta, orientável e sem bordo. Se $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ é exata, então*

$$\int_M d\omega = 0.$$