



DISCIPLINA: MATA03 - CÁLCULO B

UNIDADE I - LISTA DE EXERCÍCIOS

Atualizada 2010.2

Áreas de figuras planas em coordenadas cartesianas

[1] Determine a área da região do plano limitada simultaneamente pelas seguintes curvas:

(1.1) $y = \ln x$, $x = 2$ e o eixo Ox (1.2) $x = 8 + 2y - y^2$, $y = 1$, $y = 3$ e $x = 0$

(1.3) $xy = 4$ e $x + y = 5$ (1.4) $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ e $x = 2$

(1.5) $y = 2x$, $y = 1$ e $y = \frac{2}{x}$ (1.6) $y = |x^2 - 4|$ e $y = 2$

(1.7) $y = x^3 - 3x$ e $y = 2x^2$ (1.8) $y = \frac{9}{x}$, $y = 9x$ e $y = x$

(1.9) $f(x) = x|x|$ e $g(x) = x^3$ (1.10) $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$

Volumes por seções planas paralelas

[2] Utilizando seções planas paralelas, mostre que o volume de uma pirâmide quadrangular reta, com altura h e base quadrada de lado a , é igual a $\frac{a^2 h}{3}$.

[3] Utilizando integral de seções planas paralelas, mostre que o volume do cone circular reto, de altura h e raio da base r , é igual a $\frac{\pi r^2 h}{3}$.

[4] Calcule o volume do sólido que tem para base um círculo cujo raio mede 3 u. c. e cujas seções transversais a um diâmetro desta são quadrados, todos contidos em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos lados cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[5] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos seus catetos cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[6] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são semi-elipses, todas situadas em um mesmo semi-espaco em relação ao plano que a contem, e que têm o eixo menor como cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro e a medida do eixo maior igual ao dobro da medida do eixo menor. (Considere a área da elipse de semi-eixos maior e menor a e b , respectivamente, igual a πab).

[7] Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixos medindo 2 cm e 3 cm e cujas seções transversais ao eixo maior são triângulos equiláteros, todos situados em um mesmo semi-espaco em relação ao plano que a contem. (Observação: A área da elipse de semi-eixos maior e menor a e b , respectivamente, igual a πab).

[8] Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixo maior e menor a e b , respectivamente, e cujas seções transversais ao eixo maior são semi-círculos, todos situados em um mesmo semi-espaco em relação ao plano que a contem, e tendo para diâmetros cordas da elipse da base, perpendiculares ao eixo maior. (Observe que esse volume é menor do que o volume do item anterior).

[9] Calcule uma expressão, em integrais, que represente o volume do sólido que tem para base a região do plano limitada pela parábola $P : x = y^2 - 1$ e a reta $r : x = y + 1$ e cujas seções transversais ao eixo Oy são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaco em relação ao plano que a contem, e tais que as hipotenusas têm extremidades no contorno da base desse sólido e são perpendiculares ao eixo Oy .

Volumes de sólidos de revolução

[10] Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região do plano limitada pelo gráfico da função $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, com $x \in [-1, 1]$, em torno do eixo Ox .

[11] Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região do plano limitada pelo gráfico da elipse $E : 9x^2 + y^2 = 9$ em torno do:

(11.1) Eixo maior (11.2) Eixo menor.

[12] Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região compreendida entre o(s) gráfico(s) de:

(12.1) $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$ e o eixo x , ao redor do eixo x

(12.2) $y = \sin x$, para $0 \leq x \leq \pi$, ao redor do eixo x

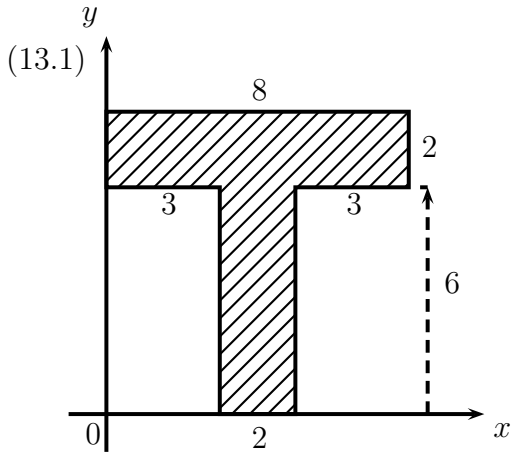
(12.3) $y = (x - 1)(x - 3)^2$ e o eixo x , ao redor do eixo y

(12.4) $y = 2\sqrt{x-1}$ e $y = x - 1$, ao redor da reta $x = 6$

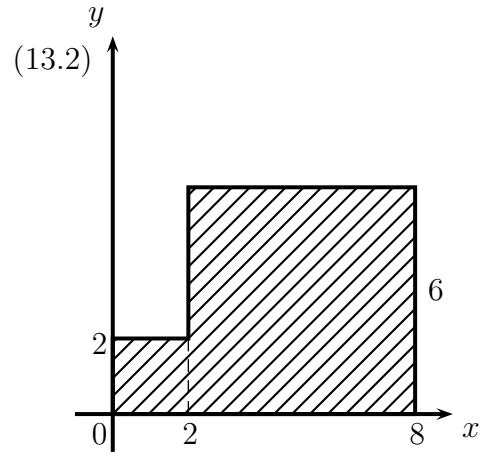
(12.5) $x = (y - 2)^2$ e $y = x$, ao redor da reta $y = 1$

Centróides de Regiões Planas em coordenadas cartesianas e o Segundo Teorema do Pappus-Guldin

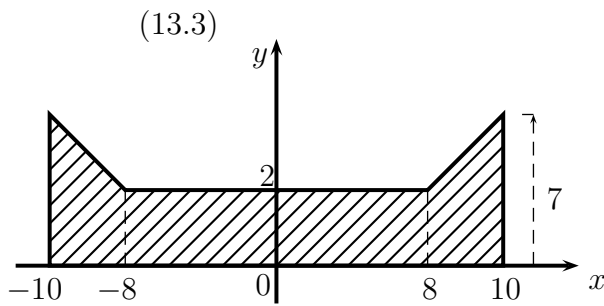
[13] Determine a posição do centróide das seguintes figuras e o volume do sólidos gerados pela rotação das mesmas em torno da reta indicada abaixo de cada figura:



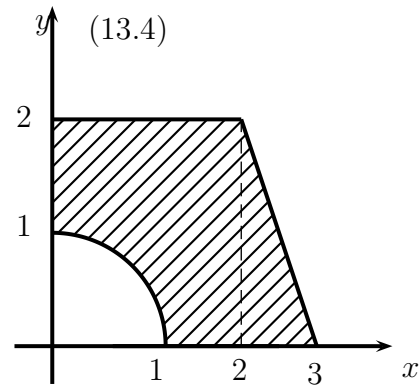
reta: $y = 10$



reta: $x - y + 4 = 0$



reta: $y - 7 = 0$



reta: $x - 4 = 0$

[14] Determine as coordenadas do centro de gravidade da região plana especificada:

(14.1) Região no primeiro quadrante, delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($x \geq 0$, $y \geq 0$)

(14.2) Área delimitada pela curva $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ e o eixo x

(14.3) Área delimitada pela parábola $y^2 = ax$ e pela reta $x = a$.

[15] Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2$.

(15.1) Esboce R e calcule a sua área.

(15.2) Calcule o centróide de R .

(15.3) A região R é girado em torno da reta $x = 2$ formando um sólido D . Calcule o volume de D , usando o teorema de Pappus-Guldin.

[16] Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y = -x^2 - 3x + 6$ e $x + y - 3 = 0$.

(16.1) Esboce R e calcule a sua área.

(16.2) Calcule o centróide de R .

(16.3) A região R é girado em torno da reta $x + y - 3 = 0$ formando um sólido D . Calcule o volume de D , usando o teorema de Pappus-Guldin.

Comprimento de arco em coordenadas cartesianas

[17] Determinar o comprimento das curvas dadas em coordenadas retangulares:

(17.1) $y = \ln(1 - x^2)$ de $x = \frac{1}{4}$ a $x = \frac{3}{4}$. (17.2) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$ de $x = 1$ a $x = 2$.

(17.3) $y = 1 - \ln(\sin x)$ de $x = \frac{\pi}{6}$ a $x = \frac{\pi}{4}$. (17.4) $(y - 1)^2 = (x + 1)^3$ de $x = 0$ a $x = 1$.

(17.5) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ de $x = 0$ a $x = 1$. (17.6) $x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4y}$ de $y = 1$ a $y = 3$.

Áreas de Superfícies de Revolução em coordenadas cartesianas

[18] Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva:

(18.1) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ ao redor do eixo Ox

(18.2) $y = x^2$, $1 \leq x \leq 2$ ao redor do eixo Oy

(18.3) $y = \sqrt{x}$, $4 \leq x \leq 9$ ao redor do eixo Ox

(18.4) $x = \sqrt{4 - y^2}$, $0 \leq y \leq 1$ ao redor do eixo Oy

Curvas na forma paramétricas

[19] Esboçar os gráficos das seguintes curvas paramétricas. Eliminando t nas equações, achar as equações na forma cartesiana:

(19.1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ (19.2) $\begin{cases} x = t^5 - 4t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$

(19.3) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$ (19.4) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$, $t \geq 0$.

Derivadas de Funções dadas na forma paramétrica

[20] Calcule as expressões das derivadas e os seus respectivos valores nos pontos dados:

$$(20.1) \begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen}(2t) \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \frac{dy}{dx}, \text{ no ponto } t = \frac{\pi}{6}$$

$$(20.2) \begin{cases} x = 6t(1+t^2)^{-1} \\ y = 6t^2(1+t^2)^{-1} \end{cases}, 0 \leq t \leq 1, \frac{dy}{dx}, \text{ no ponto de abscissa } \frac{12}{5}$$

$$(20.3) \begin{cases} x = t + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y = t + \ln t \end{cases}, t > 0, \frac{dy}{dx}, \text{ no ponto } t = 8$$

[21] Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ nos seguintes casos:

$$(21.1) \begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen}(2t) \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (21.2) \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$$

[22] Verifique se:

$$(22.1) \begin{cases} x = \sec(t) \\ y = \ln(\cos t) \end{cases}, t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ satisfaz a equação } \frac{d^2y}{dx^2} + e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(22.2) \begin{cases} x = \operatorname{arcsen}(t) \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, t \in [-1, 1], \text{ satisfaz a equação } \operatorname{sen} x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

[23] Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da curva C , no ponto de abscissa $x_0 = -\frac{1}{4}$, sendo C , definida parametricamente pelas equações

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \operatorname{sen}^3 t \end{cases}, t \in [0, \pi].$$

[24] Determine as equações das retas tangentes e normal ao gráfico da curva C , no ponto com $t = 1$, sendo C , definida parametricamente pelas equações

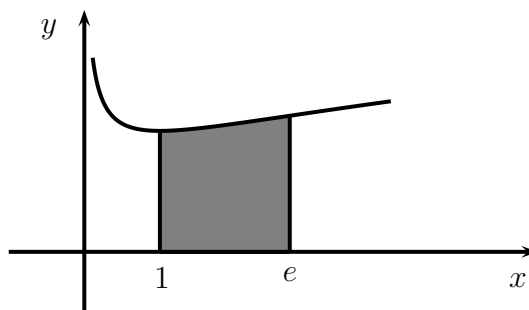
$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \operatorname{arctg}(t) \end{cases}.$$

Áreas de regiões planas dadas por funções na forma paramétrica

[25] Determine a área limitada:

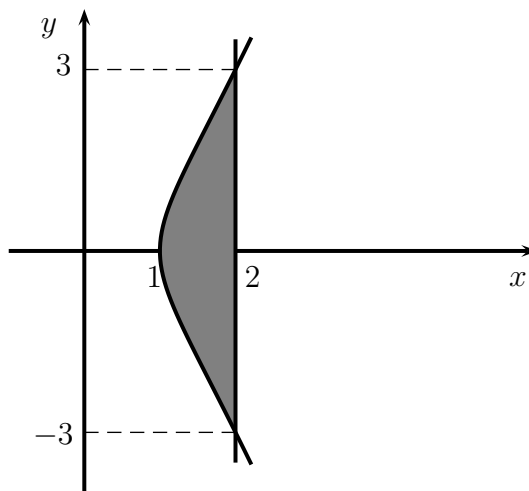
(25.1) pelo eixo Ox , $x = 1$, $x = e$ e a curva

de equações paramétricas $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$

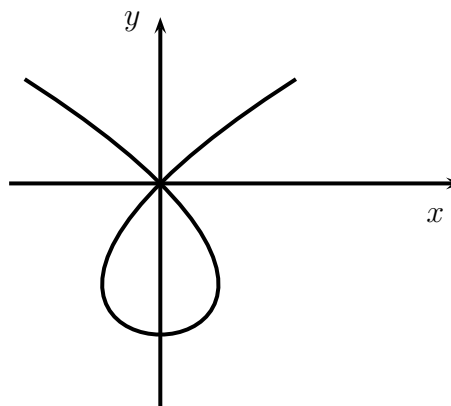


(25.2) pelas curvas de equações $x = 2$ e

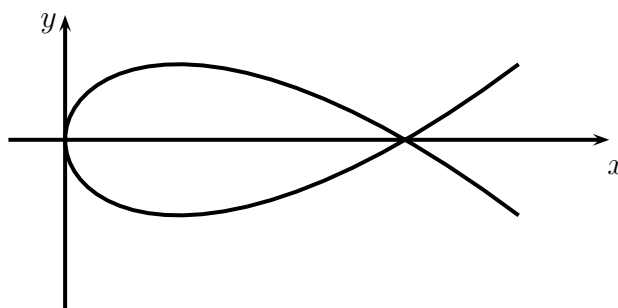
$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$



(25.3) pelo laço de curva $\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$



(25.4) pelo laço de curva $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{cases}$



[26] Seja R a região do plano acima da reta $y = 2$ e abaixo do arco da cicloide de equações

$$\begin{cases} x(t) = 2(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Esboce R e calcule a sua área.

Comprimento do arco de uma função na forma paramétrica

[27] Calcule os comprimentos das curvas descritas abaixo:

$$(27.1) \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(27.2) \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = \ln t \end{cases}, 1 \leq t \leq 2$$

$$(27.3) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$$

$$(27.4) \begin{cases} x = t - t^2 \\ y = 0 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$(27.5) \begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(27.6) \begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t \\ y = e^t \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

[28] As equações $\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$ dão a posição (x, y) de uma partícula no instante t .

Determine a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 5$.

[29] Determine o comprimento de arco do laço de curva do exercício (25.4).

Respostas

$$[1] \left\{ \begin{array}{lll} (1.1) [2\ln 2 - 1] \text{u.a} & (1.2) \frac{46}{3} \text{u.a} & (1.3) \left[\frac{15}{2} - 8\ln 2 \right] \text{u.a} \\ (1.4) \left[\frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3} \right] \text{u.a} & (1.5) \left[\frac{-3}{4} + 2\ln 2 \right] \text{u.a} & (1.6) \left[\frac{16\sqrt{2} + 24\sqrt{6} - 64}{3} \right] \text{u.a} \\ (1.7) \frac{71}{6} \text{u.a} & (1.8) 18\ln 3 \text{ u.a} & (1.9) \frac{1}{6} \text{u.a} \\ (1.10) \frac{64}{3} \text{u.a} & & \end{array} \right.$$

$$[4] V = 144 \text{ u.v} \quad [5] V = \frac{8r^3}{3} \quad [6] V = \frac{4\pi r^3}{3} \quad [7] V = 16\sqrt{3} \text{ cm}^3 \quad [8] V = \frac{2\pi ab^2}{3}$$

$$[9] V = \int_{-1}^2 \frac{(2+y-y^2)^2}{4} dy = \frac{81}{40} \text{ u.v}$$

$$[10] V = \frac{\pi(e^4 + 4e^2 - 1)}{4e^2} \text{ u.v}$$

$$[11] \left\{ \begin{array}{ll} (11.1) V = 4\pi \text{ u.v} & (11.2) V = 12\pi \text{ u.v} \end{array} \right.$$

$$[12] \left\{ \begin{array}{lll} (12.1) V = \frac{96\pi}{5} \text{ u.v} & (12.2) V = \frac{\pi^2}{2} \text{ u.v} & (12.3) V = \frac{24\pi}{5} \text{ u.v} \\ (12.4) V = \frac{272\pi}{15} \text{ u.v} & (12.5) V = \frac{27\pi}{2} \text{ u.v} & \end{array} \right.$$

$$[13] \left\{ \begin{array}{ll} (13.1) \left(4, \frac{37}{7}\right); V = 264\pi u.v & (13.2) \left(\frac{23}{5}, \frac{14}{5}\right); V = 232\sqrt{2}\pi u.v \\ (13.3) \left(0, \frac{23}{15}\right); V = \frac{1640}{3}\pi u.v & (13.4) \left(\frac{24}{20-\pi}, \frac{52}{3(20-\pi)}\right); V = 2\pi(14-\pi)u.v \end{array} \right.$$

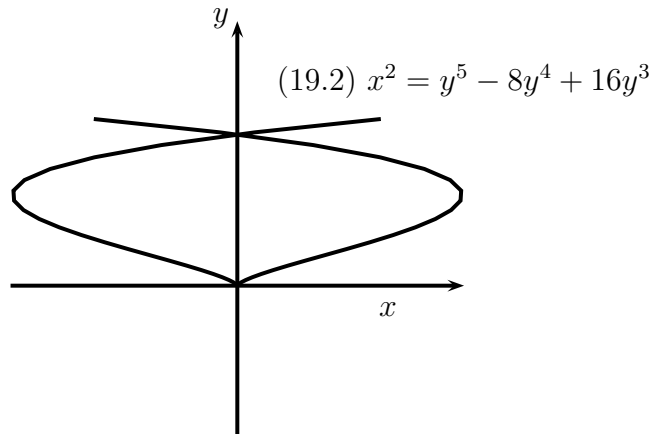
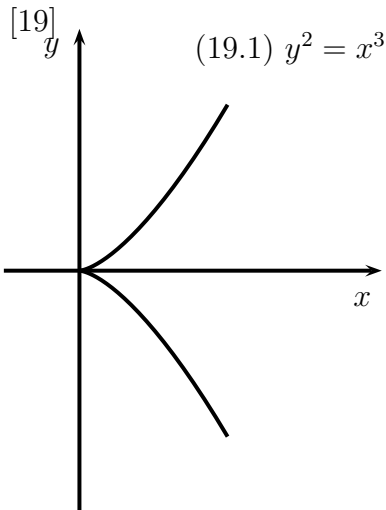
$$[14] \left\{ \begin{array}{lll} (14.1) \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right) & (14.2) \left(0, \frac{8}{5}\right) & (14.3) \left(\frac{3a}{5}, 0\right) \end{array} \right.$$

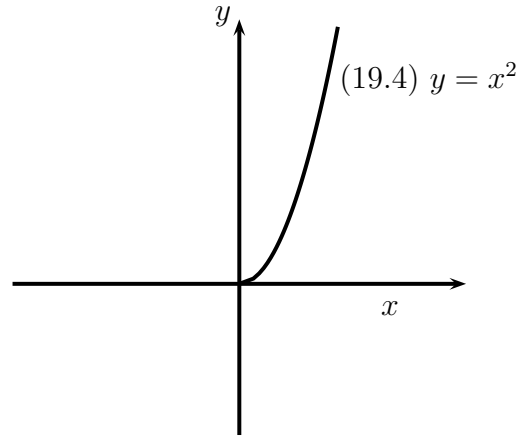
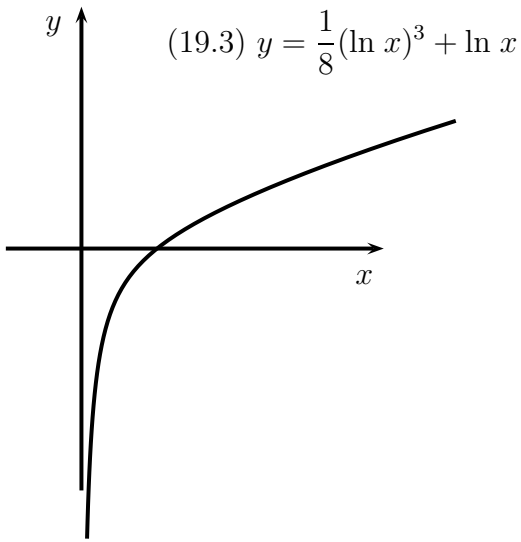
$$[15] \left\{ \begin{array}{lll} (15.1) A = \frac{8}{3} \text{ u.a} & (15.2) (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1) & (15.3) V = \frac{32\pi}{3} \text{ u.v} \end{array} \right.$$

$$[16] \left\{ \begin{array}{lll} (16.1) A = \frac{32}{3} \text{ u.a} & (16.2) (\bar{x}, \bar{y}) = \left(-1, \frac{28}{5}\right) & (16.3) V = \frac{256\sqrt{2}\pi}{15} \text{ u.v} \end{array} \right.$$

$$[17] \left\{ \begin{array}{lll} (17.1) \ln\left(\frac{21}{5}\right) - \frac{1}{2} \text{ u.c} & (17.2) \frac{123}{32} \text{ u.c} & (17.3) \ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right| \text{ u.c} \\ (17.4) \frac{1}{27}(22\sqrt{22} - 13\sqrt{13}) \text{ u.c} & (17.5) \frac{1}{2e}(e^2 - 1) \text{ u.c} & (17.6) \frac{53}{6} \text{ u.c} \end{array} \right.$$

$$[18] \left\{ \begin{array}{ll} (18.1) 18\pi u.a & (18.2) \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})u.a \\ (18.3) \frac{\pi(37\sqrt{37} - 17\sqrt{17})}{6}u.a & (18.4) 4\pi u.a \end{array} \right.$$





[20] (20.1) $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos(2t)}{\cos(t)}, \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(20.2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-t^2}$; para $x = \frac{12}{5}$, temos $t = \frac{1}{2}$, logo $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$

(20.3) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+t}{t} \cdot \frac{1}{1+(\pi/2)\cos(\frac{\pi}{2}t)}, \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{t=8} = \frac{9}{8+4\pi}$

[21] (21.1) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \cos(2t) \cdot \sin(t) - 4 \cdot \sin(2t) \cdot \cos(t)}{\cos^3(t)} \quad (21.2) \frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{5t}$

[23] $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

[24] $\left\{ \begin{array}{l} \text{Reta Tangente: } y - (1 + \frac{\pi}{2}) = 2(x - 1) \\ \text{Reta Normal: } y - (1 + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}(x - 1) \end{array} \right.$

[25] (25.1) $\frac{9e-10}{4}$ u.a (25.2) $\frac{52}{15}$ u.a (25.3) $\frac{8}{15}$ u.a (25.4) $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ u.a

[26] $(2\pi + 8)$ u.a

[27] $\left\{ \begin{array}{l} (27.1) 4\pi \text{ u.c} \quad (27.2) \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln \left| \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} \right| \text{ u.c} \quad (27.3) 6a \text{ u.c} \\ (27.4) \frac{1}{4} \text{ u.c} \quad (27.5) 8a \text{ u.c} \quad (27.6) \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1) \text{ u.c} \end{array} \right.$

[28] $10\sqrt{26} + 2\ln(5 + \sqrt{26})$ u.c [29] $4\sqrt{3}$ u.c