Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática

DISCIPLINA: MATA03 - CÁLCULO B

UNIDADE II - LISTA DE EXERCÍCIOS

Atualizada 2010.2

Coordenadas Polares

[1] Dados os pontos $P_1(3, \frac{5\pi}{3})$, $P_2(-3, 330°)$, $P_3(-1, -\frac{\pi}{3})$, $P_4(\sqrt{2}, -315°)$, $P_5(0, 53°)$, $P_6(0, e^{\pi})$ e $P_7(1, 3)$, determine:

(1.1) A representação gráfica de cada um desses pontos no plano polar.

(1.2) Três outros conjuntos de coordenadas polares para os pontos P_3 e P_4.

(1.3) Quais desses pontos coincidem com o ponto $P(3, 2310°)$.

(1.4) O conjunto principal de coordenadas polares do ponto P_2.

(1.5) Um conjunto de coordenadas polares (r, θ) do ponto P_3, tal que $r > 0$ e $\theta \in (-7\pi, -5\pi)$.

[2] Em cada um dos ítens a seguir, identifique o lugar geométrico do ponto que se move e faça um esboço desse lugar:

(2.1) Um ponto $P(r, \theta)$ se move de maneira que, para todos os valores de seu ângulo vetorial θ seu raio vetor r permanece constante e igual a 4.

(2.2) Um ponto se move de maneira que, para todos os valores de seu raio vetor, seu ângulo vetorial permanece constante e igual a 4.

[3] Determine um conjunto abrangente para cada uma das curvas dadas a seguir:

(3.1) $C_1: \ r = 4$ (3.2) $C_2: \ \theta = \frac{\pi}{2}$ (3.3) $C_3: \ r = 2\cos\theta$ (3.4) $C_4: r = 2\cos 4\theta$

[4] Verifique se o ponto P pertence à curva C, sendo:

(4.1) $P(-1, \frac{\pi}{6})$ e $C: \ r^2 - 2\cos 2\theta = 0$ (4.2) $P(-1, \frac{\pi}{2})$ e $C: \ r(1 - 3\,\text{sen}\,\theta) = 4$

(4.3) $P(4, \frac{\pi}{2})$ e $C: \ r = 4\,\text{sen}\,3\theta$ (4.4) $P(0, \frac{\pi}{11})$ e $C: \ r - 3\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta = 0$.

[5] Determine o conjunto principal de coordenadas polares dos pontos de coordenadas retangulares:

(3.1) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ (3.2) $(3, -2)$ (3.3) $(\cos 2, \ \text{sen}\, 2)$

[6] Transforme as equações cartesianas para polares:

(6.1) $2x - y = 0$ (6.2) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ (6.3) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

(6.4) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (6.5) $x^2 + y^2 + 3y = 0$ (6.6) $x^2 - y^2 = 16$

[7] Transforme as equações polares para cartesianas:

(7.1) $r = 8 \text{ sen } \theta$ (7.2) $r^2 \text{ sen } 2\theta = 2$ (7.3) $r = \dfrac{6}{2 - 3 \text{ sen } \theta}$

(7.4) $r^2 = \theta$ (7.5) $r = 2 \text{ sen } 3\theta$ (7.6) $r^2 = 4 \cos 2\theta$

[8] Determine todos os pares de coordenadas polares do ponto Q simétrico de $P\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ em relação:

(8.1) ao eixo polar (8.2) ao eixo à 90° (8.3) ao pólo.

[9] Considere a curva $C : r^2 = 2 \text{ sen } 2\theta$.

(9.1) Determine uma equação polar da curva C' simétrica de C em relação:

(a) ao eixo polar (b) ao eixo à 90° (c) ao pólo.

(9.2) Verifique se C é simétrica em relação:

(a) ao eixo polar (b) ao eixo à 90° (c) ao pólo.

[10] Ache os pontos de intersecção dos gráficos do par de equações dadas:

(10.1) $\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 1 + \cos \theta \end{cases}$ (10.2) $\begin{cases} r = 4(1 + \text{sen } \theta) \\ r(1 - \text{sen } \theta) = 3 \end{cases}$ (10.3) $\begin{cases} r = 1 - \text{sen } \theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$

(10.4) $\begin{cases} r = 4 - 2 \text{ sen } \theta \\ r = -2 + 2 \text{ sen } \theta \end{cases}$ (10.5) $\begin{cases} r = 2 + 2 \cos \theta \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

[11] Deduzir a fórmula da distância entre os pontos $P_1(r_1, \theta_1)$ e $P_2(r_2, \theta_2)$ em coordenadas polares.

[12] Faça um esboço do gráfico das seguintes equações polares:

(12.1) $r = 3 - 4 \cos \theta$ (12.2) $r = 4 + 2 \text{ sen } \theta$ (12.3) $r^2 = 9 \text{ sen } 2\theta$

(12.4) $r^2 = -25 \cos 3\theta$ (12.5) $r = 4 \text{ sen } 5\theta$ (12.6) $r = |\text{ sen } 2\theta|$

(12.7) $r = 3\theta,\ \theta > 0$ (12.8) $r = -8 \text{ sen } 2\theta$

Áreas de figuras planas em coordenadas polares

[13] Nos problemas a seguir encontre a área das regiões indicadas:

(13.1) Interior à circunferência $r = \cos \theta$ e exterior à cardióide $r = 1 - \cos \theta$.

(13.2) Exterior à circunferência $r = \cos \theta$ e interior à cardióide $r = 1 - \cos \theta$.

(13.3) Intersecção do círculo $r = \cos \theta$ com o interior da cardióide $r = 1 - \cos \theta$.

(13.4) Intersecção dos círculos $r = 4 \cos \theta$ e $r = 2$.

(13.5) Interior à rosácea $r = 2 \text{ sen } 2\theta$.

(13.6) Interior à rosácea $r = 2\cos 3\theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

(13.7) Interior à lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

(13.8) Interior à rosácea $r = \text{sen}\, 2\theta$ e exterior à circunferência circunferência $r = \cos\theta$.

(13.9) Exterior à limaçon $r = 2 - \text{sen}\,\theta$ e interior à circunferência $r = 3\,\text{sen}\,\theta$.

Comprimento de arco em coordenadas polares

[14] Calcular o comprimento de arco das seguintes curvas dadas em coordenadas polares:

(14.1) a espiral $r = \theta^2,\ 0 \le \theta \le \sqrt{3}$

(14.2) a espiral $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\theta},\ 0 \le \theta \le \pi$

(14.3) a cardioide $r = 1 + \cos\theta$

(14.4) $r = -1 + \text{sen}\,\theta$

(14.5) $r = (\cos\theta + \text{sen}\,\theta),\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

(14.6) $r = \sqrt{1 + \text{sen}\, 2\theta},\ 0 \le \theta \le \pi$

[15] Determine o comprimento da espiral logarítmica $r = e^{\theta/2}$ de $\theta = 0$ a $\theta = 2$.

[16] Calcule o comprimento de arco da curva $r = \dfrac{1 + \cos\theta}{2}$.

Domínio, Imagem e Curvas de Nível

[17] Determine o domínio de cada uma das funções abaixo e represente-o graficamente:

(17.1) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - 1} + \sqrt{y - x^2}$

(17.2) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - 4}\,\ln(x - y)$

(17.3) $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$

(17.4) $f(x,y) = \ln\left[\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x}\right]$

(17.5) $f(x,y) = \arccos(x - y)$

(17.6) $f(x,y) = \text{arcsec}\left(\dfrac{x^2}{4} + y^2\right)$

[18] Determine o domínio; determine e trace as interseções do gráfico com os planos coordenados; determine e trace as curvas de nível; e esboce o gráfico das funções:

(18.1) $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$

(18.2) $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2$

(18.3) $f(x,y) = x^2$

(18.4) $f(x,y) = \dfrac{1}{1 + y^2}$

(18.5) $f(x,y) = 8 - 2x - 4y$

(18.6) $f(x,y) = \dfrac{4}{x^2 + 4y^2}$

(18.7) $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$

[19] Descreva as curvas de nível da cada função:

(19.1) $f(x,y) = e^{-4x^2 - y^2}$

(19.2) $f(x,y) = \text{arcsen}(y - x)$

(19.3) $f(x,y) = \ln(xy)$

Limites e Continuidade

[20] Mostre que $\lim\limits_{P \to P_0} f(x,y)$ não existe se:

(20.1) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ e $P_0(0,0)$

(20.2) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$ e $P_0(0,0)$

(20.3) $f(x,y) = \dfrac{y^3 - (x-2)^4}{2(x-2)^3 + y^3}$ e $P_0(2,0)$

(20.4) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{y-1}$ e $P_0(0,1)$

(20.5) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4}$ e $P_0(0,0)$

(20.6) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - 4y^2}$ e $P_0(0,0)$

(20.7) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y-4)(x^2+xy)}{(x-1)+(y-3)}; & \text{se } y \neq 4-x \\ 2; & \text{se } y = 4-x \end{cases}$ e $P_0(1,3)$

[21] Calcule os limites:

(21.1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(21.2) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{\text{arcsen}(xy-2)}{\text{arctg}(3xy-6)}$

(21.3) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sqrt{2x-y} - 2}{2x - y - 4}$

[22] Sabendo que os limites a seguir existem, use coordenadas polares para determiná-los:

(22.1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y \ln\,(x^2+y^2)$

(22.2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \text{arctg}\Big(\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\Big)$

(22.3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\Big(\dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}\Big)$

(22.4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2+x^3}{x^2+y^2}$

[23] Estude a continuidade das seguintes funções no ponto ou ao longo da reta indicada:

(23.1) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$; $(0,0)$

(23.2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{3x+5y}, & y \neq -\frac{3}{5}x \\ 0, & y = -\frac{3}{5}x \end{cases}$; $(0,0)$

(23.3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$; $(0,0)$

(23.4) $f(x,y) = \begin{cases} 1 - x, & y \geq 0 \\ -2, & y < 0 \end{cases}$; $y = 0$

Derivadas Parciais de 1ª ordem

[24] Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

(24.1) $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ (24.2) $z = \text{ arcsen}(\sqrt{xy})$ (24.3) $z = e^{y/x} \ln \left(\dfrac{x^2}{y}\right)$

(24.4) $z = xy + \text{ sen } (xy)$ (24.5) $z = e^{xy} \cos\,(2x - y)$

[25] Para as funções abaixo calcule, caso exista, as derivadas parciais, nos pontos indicados:

(25.1) $f(x,y) = x \cos\left(\dfrac{x}{y} + \pi\right)$; $P_0(0,1)$

(25.2) $f(x,y) = \text{ arctg}\sqrt{4x^2 - y^2}$; $P_0(1,1)$

(25.3) $f(x,y) = \text{ tg } [x\ln\,(1+y)]$; $P_0(\pi, 0)$

(25.4) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+2y}{x^2-y} & ;\text{ se } y \neq x^2 \\ 3 & ;\text{ se } y = x^2 \end{cases}$; $P_0(1,0)$ e $P_1(1,1)$.

[26] Verificar a identidade proposta para cada função dada:

(26.1) $z = xy^3 - x^3y$; $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = y^4 - x^4$

(26.2) $z = \ln\,(\sqrt{x^2+y^2})$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$

(26.3) $z = x\ln\,(x^2+y^2) - 2y \text{ arctg}(\frac{y}{x})$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + 2x$

(26.4) $z = \dfrac{x-y}{xy}$; $y\dfrac{\partial z}{\partial y} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} = -z$

Diferenciabilidade

[27] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

[28] Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Derivadas Parciais de Ordem Superior

[29] Calcule as derivadas parciais de segunda ordem de:

(29.1) $z = x^3y - 2x^2y^2 + 5xy - 2x$ (29.2) $z = x \cos(xy) - y \operatorname{sen}(xy)$

(29.3) $z = \cos(x^3 + xy)$ (29.4) $z = e^{x^2+y^2}$

[30] Provar as identidades:

(30.1) $f(x,t) = \operatorname{sen}(ap\, x) \operatorname{sen}(p\, t);$ $a^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

(30.2) $V(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct);$ $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0;$ f e g são funções deriváveis.

[31] Uma função f de x e y é harmônica se satisfazem à equação de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Prove que as funções a seguir são harmônicas:

(31.1) $f(x,y) = e^{-x} \cos(y)$

(31.2) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$

(31.3) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right),\ x > 0.$

Regra da Cadeia

[32] Usando a regra da cadeia para $z = f(x,y)$ calcule $\dfrac{dz}{dt}$:

(32.1) $z = x^2 + 2y^2,\ x = \operatorname{sen}(t),\ y = \cos(t)$

(32.2) $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right),\ x = \ln(t),\ y = e^t$

(32.3) $z = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{y}\right),\ x = t^2,\ y = \ln t$

[33] Usando a regra da cadeia para $z = f(x,y)$ calcule $\dfrac{\partial z}{\partial t},\ \dfrac{\partial z}{\partial s}$:

(33.1) $z = x^2 - y^2,\ x = 3t - s,\ y = t + 2s$

(33.2) $z = e^{\frac{y}{x}},\ x = 2s\cos(t),\ y = 4s\operatorname{sen}(t)$

(33.3) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2},\ x = se^t,\ y = se^{-t},$

[34] Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x,y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Calcule:

(34.1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1)$ (34.2) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1)$

[35] Considere a função dada por $w = xy + z^4$, onde $z = f(x,y)$. Se $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 4$ e $f(1,1) = 1$, calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}(1,1)$.

[36] Seja $f(x,y) = g\Big(x^2y, x^3y^2\Big)$, onde f e g são funções diferenciáveis. Sabendo-se que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 16$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 8$, calcule as derivadas parciais de g no ponto $(4,8)$.

[37] Considere $f(x,y) = \ln\,(xy^2) + \text{ arctg}(x^2 - y)$.

(37.1) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,3)$.

(37.2) Se $x = g(u,v) = uv + 2v,\ y = h(u,v),\ h(0,1) = 3,\ \dfrac{\partial h}{\partial u}(0,1) = 2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1) = -4$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1)$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,1)$.

Diferenciação Implícita

[38] Suponha que $z = f(x,y)$ é definida implicitamente como uma função de x e y pela equação $x^{2/3} + 2y^{2/3} + 3z^{2/3} = 1$, onde $x, y,$ e z sao números reais positivas. Usando derivação implícita, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

[39] Se z é uma função de x e y definida implicitamente pela equação $xyz = \cos\,(x+y+z)$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(0, \pi/4, \pi/4)$.

[40] Se z é uma função de x e y definida implicitamente pela equação $y + x^{(z-1)} + y^2 z = 1$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,0)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(2,0)$.

[41] Se $F(x,y) = 0$, mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$.

Plano Tangentes, Reta Tangentes e Normais

[42] Determine a equação do plano tangente e da reta normal a cada superfície abaixo, nos pontos indicados:

(42.1) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ em $P = (1,1,1)$

(42.2) $xyz = 6$ no ponto cuja projeção no plano $y = 0$ é $(1,0,3)$

(42.3) $\cos\,(xy) + \text{ sen }(yz) = 0$ em $P = (1, \pi/6, -2)$

(42.4) $x^3 + y^3 + z - 6xy = 0$ para $x = y = 2$

(42.5) $g(x,y) = x^y$ em $(1,1,1)$

[43] Determine o plano tangente ao gráfico de $z = xy$ que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$.

[44] Dada a superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, determine as equações dos planos tangentes que são paralelos ao plano $x + 4y + 6z = 0$.

[45] Determine um vetor normal e a equação da reta tangente a cada curva no ponto indicado:

(45.1) $x^2 + y^2 = 2,\ P_0(1, 1)$ (45.2) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4,\ P_0(1/2, 1)$

[46] Encontre o vetor direção da reta tangente no ponto dado da curva C que é interseção das superfícies:

(46.1) $xz + 2x + 4z = 5$ e $4xy + 3y + 6z = 56$, no ponto $(2, 5, 1/6)$.

(46.2) $x^2 - 2xz + y^2 z = 1$ e $3xy + 2yz = -6$, no ponto $(1, -2, 0)$.

Respostas

[1]
- (1.2) $P_3(1,\ 120°)$, $P_3(1,\ 480°)$, $P_3(-1,\ 300°)$
  $P_4(\sqrt{2},\ 45°)$, $P_4(-\sqrt{2},\ -135°)$, $P_4(-\sqrt{2},\ 225°)$
- (1.3) P_2 (1.4) $P_2(3,\ 150°)$ (1.5) $P_2(1,\ -\frac{16\pi}{3})$

[2] (2.1) Círculo: $r = 4$ (2.2) Reta: $\theta = 45°$

[3]
- (3.1) $E(C) = \{r = 4,\ r = -4\}$ (3.2) $E(C) = \{\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\}$
- (3.3) $E(C) = \{r = 2\cos\theta\}$ (3.4) $E(C) = \{r = 2\cos 4\theta;\ r = -2\cos 4\theta\}$

[4] (4.1) Sim (4.2) Sim (4.3) Não (4.4) Sim

[5] (5.1) $(3,\ \frac{5\pi}{3})$ (5.2) $(\sqrt{13},\ 2\pi + \operatorname{arctg}(-\frac{2}{3}))$ (5.3) $(1,\ 2)$

[6]
- (6.1) $\theta = \operatorname{arctg} 2$
- (6.2) $r^2 - 2r(\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta) + 6 = 0$
- (6.3) $r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta = 0$
- (6.4) $r = 0$ ou $r(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta) - \frac{3a}{2}\operatorname{sen} 2\theta = 0$ (6.5) $r + 3\operatorname{sen}\theta = 0$
- (6.6) $r^2 = 16\sec\theta$

[7]
- (7.1) $x^2 + y^2 - 8y = 0$ (7.2) $xy = 1$
- (7.3) $2\sqrt{x^2+y^2} - 6 - 3y = 0$ (7.4) $y - x\operatorname{tg}(x^2+y^2) = 0$
- (7.5) $(x^2+y^2)^2 - 6x^2y + 2y^3 = 0$ (7.6) $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$

[8]
- (8.1) $\left(2(-1)^n,\ -\frac{\pi}{3} + n\pi\right),\ n \in \mathbb{Z}$ (8.2) $\left(2(-1)^n,\ \frac{2\pi}{3} + n\pi\right),\ n \in \mathbb{Z}$
- (8.3) $\left(2(-1)^n,\ \frac{4\pi}{3} + n\pi\right),\ n \in \mathbb{Z}$

[9]
- (9.1) (a) $r^2 = -2\operatorname{sen} 2\theta$ (b) $r^2 = -2\operatorname{sen} 2\theta$ (c) $r^2 = 2\operatorname{sen} 2\theta$
- (9.2) (a) Nâo (b) Não (c) Sim

[10]

(10.1) $\left(\frac{3}{2},\ \frac{\pi}{3}\right)$ e $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5\pi}{3}\right)$

(10.2) $\left(6,\ \frac{\pi}{6}\right),\ \left(6,\ \frac{5\pi}{6}\right),\ \left(2,\ \frac{7\pi}{6}\right)$ e $\left(2,\ \frac{11\pi}{6}\right)$

(10.3) $(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (1,\ \pi),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{5\pi}{6}\right),$

$\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4},\ \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)\right),\ \left(\frac{5-\sqrt{17}}{4},\ \pi-\ \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)\right)$

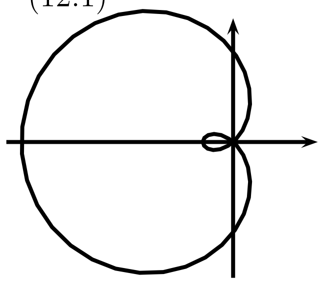
(10.4) $\left(-3,\frac{7\pi}{6}\right),\ \left(-3,\frac{11\pi}{6}\right)$

(10.5) $(0,0),\ \left(2+\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$ e $\left(2-\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{4}\right)$

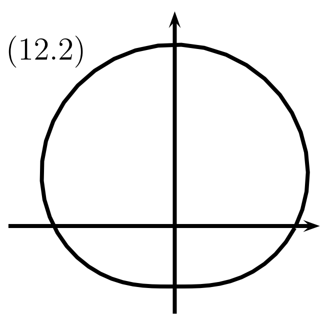
[11] $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)$

[12]

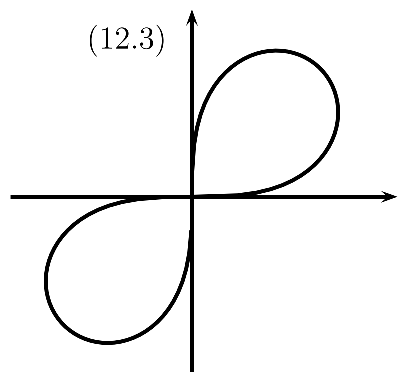
(12.1)



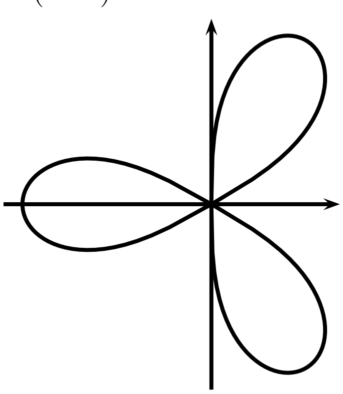
(12.2)



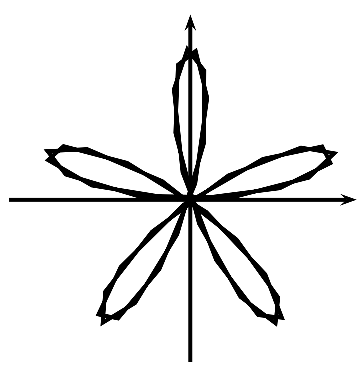
(12.3)



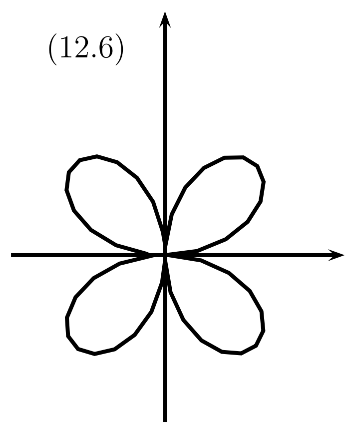
(12.4)

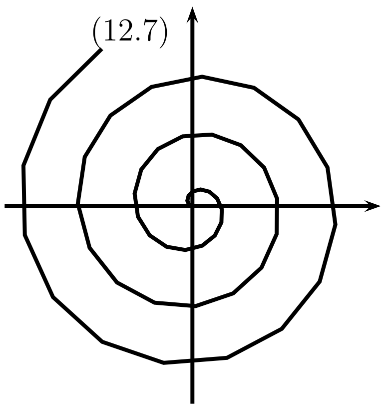


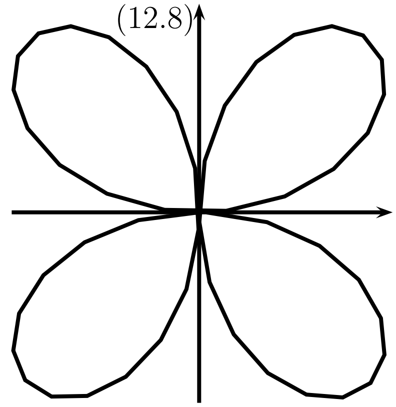
(12.5)



(12.6)







[13]

(13.1) $\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$ (13.2) $\dfrac{11\pi+12\sqrt{3}}{12}$ (13.3) $\dfrac{7\pi-12\sqrt{3}}{12}$ (13.4) $\dfrac{8\pi-6\sqrt{3}}{3}$

(13.5) 2π (13.6) $\dfrac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$ (13.7) a^2 (13.8) $\dfrac{4\pi+3\sqrt{3}}{16}$

(13.9) $3\sqrt{3}$

[14]

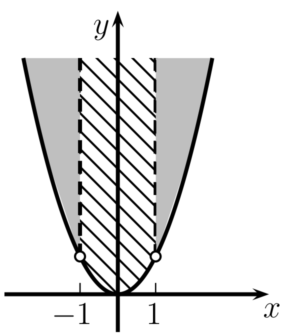
(14.1) $\dfrac{21\sqrt{7}}{9}-\dfrac{8}{3}$ (14.2) $e^{\pi}-1$ (14.3) 8

(14.4) 8 (14.5) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (14.6) $\pi\sqrt{2}$

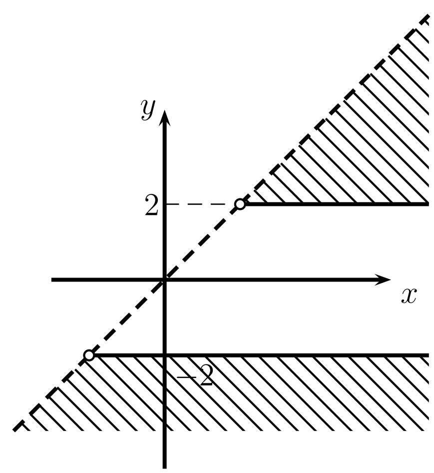
[15] $\sqrt{5}(e-1)$ [16] 4

[17]

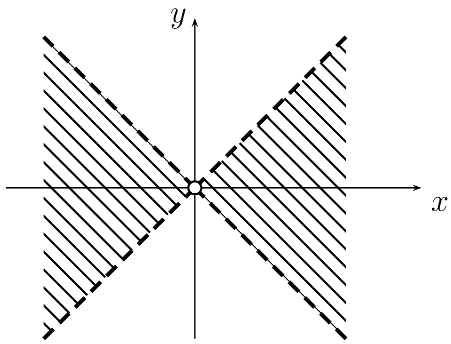
(17.1) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2-1\neq 0 \text{ e } y\geq x^2\}$



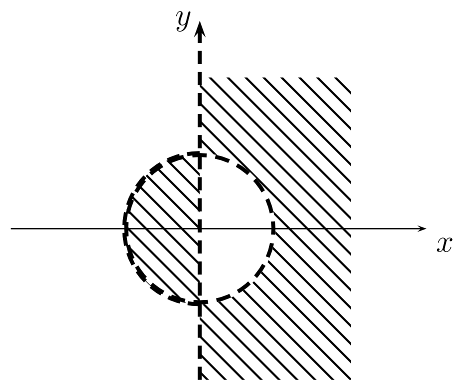
(17.2) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\geq 2 \text{ ou } y\leq -2 \text{ e } x>y\}$



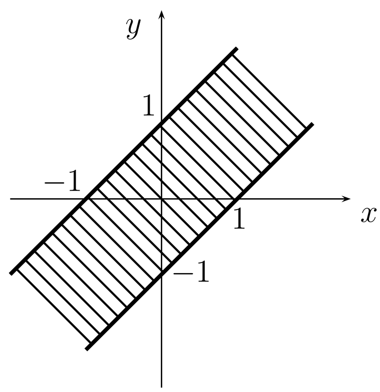
(17.3) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2-y^2>0\}$



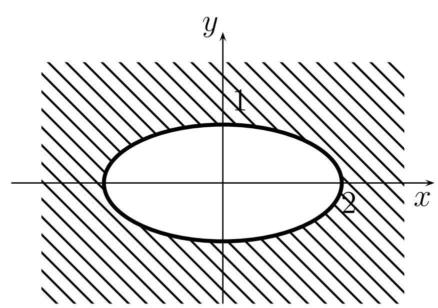
(17.4) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\neq 0 \text{ e } \dfrac{x^2+y^2-1}{x}>0\right\}$



(17.5) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; -1\leq x-y\leq 1\}$



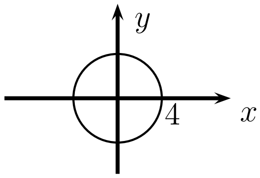
(17.6) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \dfrac{x^2}{4}+y^2\leq -1 \text{ ou } \dfrac{x^2}{4}+y^2\geq 1\}$



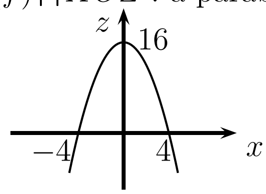
[18]

(18.1) $D(f) = \mathbb{R}^2$

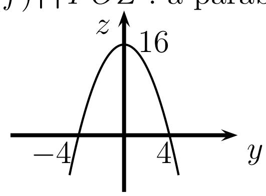
$G(f) \bigcap XOY$: o circulo: $x^2 + y^2 = 16$



$G(f) \bigcap XOZ$: a parábola $z = 16 - x^2$



$G(f) \bigcap YOZ$: a parábola $z = 16 - y^2$



Curvas de nível:

Para $z = k$,

$k < 16$: circulos $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{16-k}\right)^2$

$k = 16$: ponto $(0, 0)$

$k > 16$: $\emptyset$

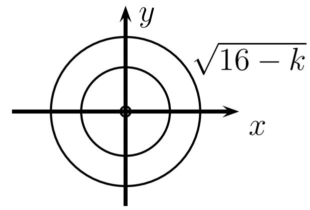
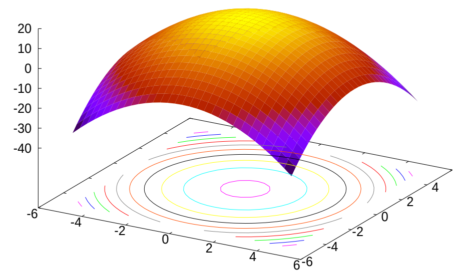


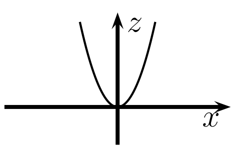
Gráfico: (um parabolóide de revolução)



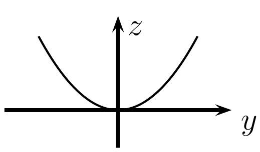
(18.2) $D(f) = \mathbb{R}^2$

$G(f) \bigcap XOY$: o ponto $(0, 0)$

$G(f) \bigcap XOZ$: a parábola $z = 9x^2$



$G(f) \bigcap YOZ$: a parábola $z = 4y^2$



Curvas de nível:

Para $z = k$,

$k > 0$: as elipses $\frac{x^2}{(\sqrt{k}/3)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{k}/2)^2} = 1$

$k = 0$: o ponto $(0, 0)$

$k < 0$: $\emptyset$

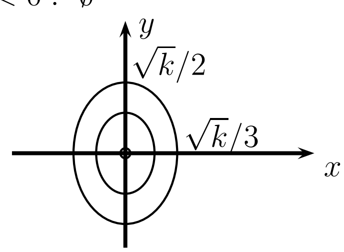
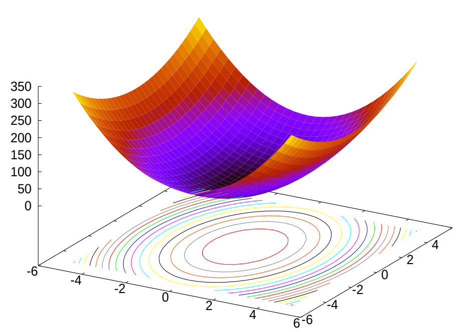
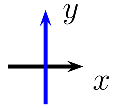


Gráfico:

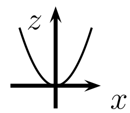


(18.3) $D(f) = \mathbb{R}^2$

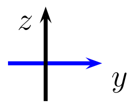
$G(f) \bigcap XOY$: o eixo OY



$G(f) \bigcap XOZ$: a parábola $z = x^2$



$G(f) \bigcap YOZ$: o eixo OY



Curvas de nível:

Para $z = k$,

$k > 0$: as retas $x = \sqrt{k}$ e $x = -\sqrt{k}$

$k = 0$: o eixo OY

$k < 0$: $\emptyset$

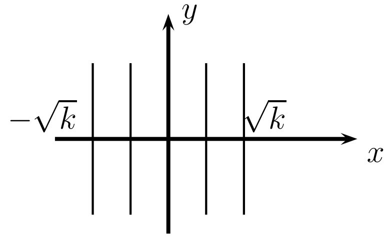
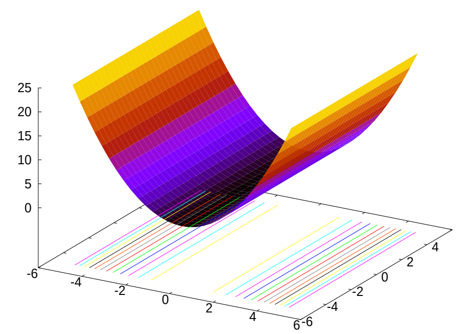


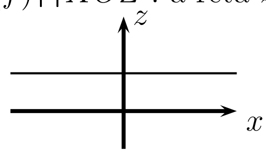
Gráfico: (uma superfície cilíndrica)



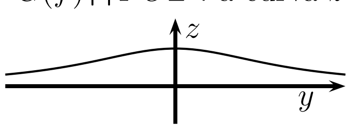
(18.4) $D(f) = \mathbb{R}^2$

$G(f) \bigcap XOY$: $\emptyset$

$G(f) \bigcap XOZ$: a reta $z = 1$



$G(f) \bigcap YOZ$: a curva $z = \frac{1}{1+y^2}$



Curvas de nível:

Para $z = k$,

$0 < k < 1$: as retas $y = \sqrt{\frac{1}{k-1}}$ e $\sqrt{\frac{1}{k-1}}$

$k = 1$: o eixo OX

$k > 1$ ou $k \leq 0$: $\emptyset$

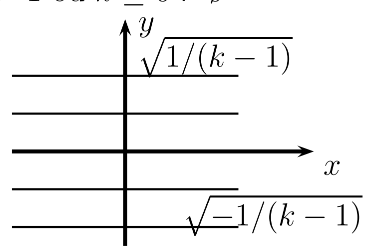
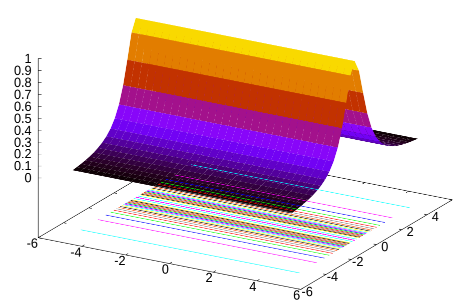
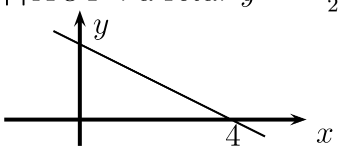


Gráfico: (uma superfície cilíndrica)

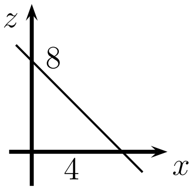


(18.5) $D(f) = \mathbb{R}^2$

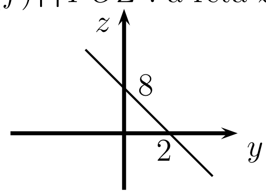
$G(f) \bigcap XOY$: a reta: $y = -\frac{x}{2} + 2$



$G(f) \bigcap XOZ$: a reta $z = -2x + 8$



$G(f) \bigcap YOZ$: a reta $z = -4y + 8$



Curvas de nível:

Para $z = k$,
$\forall k \in \mathbb{R}$: as retas $y = -\frac{x}{2} + \frac{8-k}{4}$

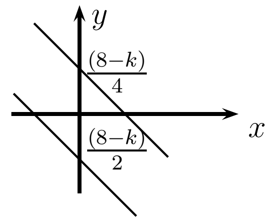
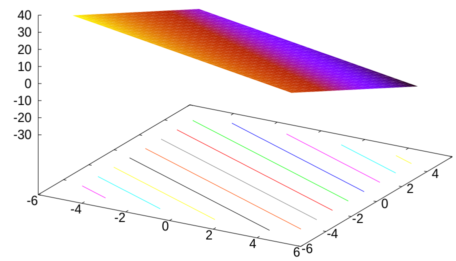


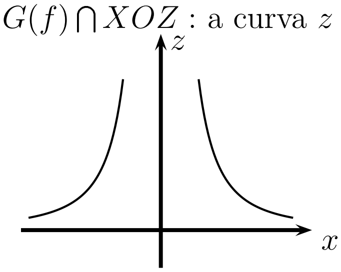
Gráfico: (um plano)



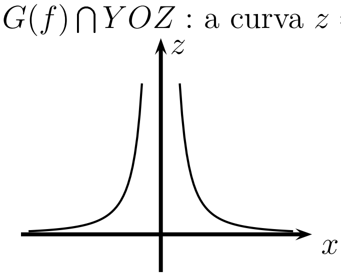
(18.6) $D(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$G(f) \bigcap XOY$: $\emptyset$

$G(f) \bigcap XOZ$: a curva $z = \frac{4}{x^2}$



$G(f) \bigcap YOZ$: a curva $z = \frac{1}{y^2}$



Curvas de nível:

Para $z = k$,

$k > 0$: elipses $\frac{x^2}{(2/\sqrt{k})^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{k})^2} = 1$

$k \leq 0$: $\emptyset$

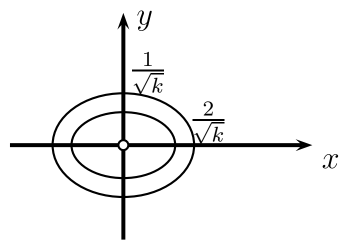
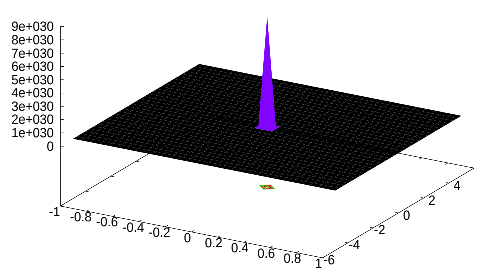


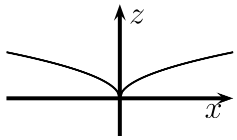
Gráfico:



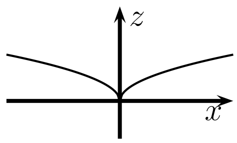
(18.7) $D(f) = \mathbb{R}^2$

$G(f) \bigcap XOY$: o ponto $(0,0)$

$G(f) \bigcap XOZ$: a curva $z = \sqrt{|x|}$



$G(f) \bigcap YOZ$: a curva $z = \sqrt{|y|}$



Curvas de nível:

Para $z = k$,

$k > 0$: circulos $x^2 + y^2 = (k^2)^2$

$k = 0$: ponto $(0,0)$

$k < 0$: $\emptyset$

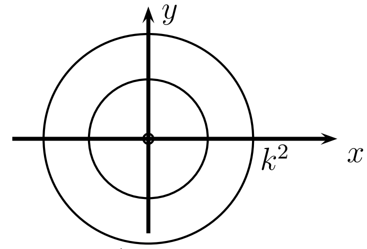
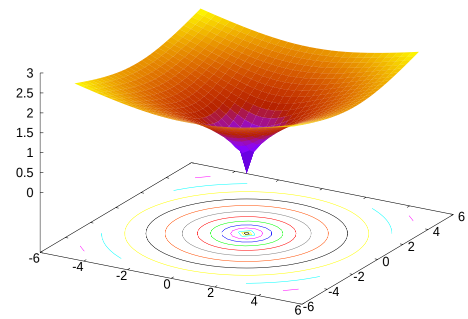


Gráfico: (uma superfície de revolução)



[19]

(19.1) $\begin{cases} k < 0, \text{ curvas de nível é vazio} \\ 0 < k < 1, \text{ curvas de nível são elipses de semi eixos } \dfrac{\sqrt{-\ln k}}{2} \text{ e } \sqrt{-\ln k} \\ k = 1, \text{ curvas de nível é o ponto } (0,0) \\ k > 1, \text{ curvas de nível é vazio} \end{cases}$

(19.2) $\begin{cases} k < 1 \text{ ou } k > 1, \text{ curvas de nível é vazio} \\ -1 \leq k \leq 1, \text{ curvas de nível são retas paralelas } y = x + k \end{cases}$

(19.3) $\Big\{$ Para $k \in \mathbb{R}$, curvas de nível são hipérboles $y = \dfrac{c}{x}, c = e^k > 0$

[21] $\Big\{$ (21.1) $+\infty$ (21.2) $\dfrac{1}{3}$ (21.3) $\dfrac{1}{4}$

[22] $\Big\{$ (22.1) 0 (22.2) $\dfrac{\pi}{2}$ (22.3) 1 (22.4) 1

[23] $\Big\{$ (23.1) contínua (23.2) descontínua (23.3) descontínua (23.4) contínua

[24]

$$(24.1)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2-y^2+z^2-2yx}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \qquad (24.2)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x-x^2y}} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y-xy^2}} \end{cases}$$

$$(24.3)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \left[\dfrac{-y}{x^2}\ln\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right) + \dfrac{2}{x}\right]e^{y/x} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \left[\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right) - \dfrac{1}{y}\right]e^{y/x} \end{cases} \qquad (24.4)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y + y\cos(xy) \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + x\cos(xy) \end{cases}$$

$$(24.5)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{xy}\left[y\cos(2x-y) - 2\,\mathrm{sen}\,(2x-y)\right] \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = e^{xy}\left[x\cos(2x-y) + \mathrm{sen}\,(2x-y)\right] \end{cases}$$

$$[25]\begin{cases} (25.1)\ f_x(P_0) = -1,\ f_y(P_0) = 0 \qquad (25.2)\ f_x(P_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ f_y(P_0) = \dfrac{-\sqrt{3}}{12} \\ \\ (25.3)\ f_x(P_0) = 0,\ f_y(P_0) = \pi \qquad (25.4)\ f_x(P_0) = 0,\ f_y(P_0) = 5, \nexists f_x(P_1), \nexists f_y(P_1) \end{cases}$$

[29]

$$(29.1)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy - 4y^2 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^2 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 3x^2 - 8xy - 5 \end{cases} \qquad (29.2)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x} = (y^3-2y)\,\mathrm{sen}\,(xy) - xy^2\cos(xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y} = x^2y\,\mathrm{sen}\,(xy) - (x^3+2x)\cos(xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = (xy^2-2x)\,\mathrm{sen}\,(xy) - (x^2y+2y)\cos(xy) \end{cases}$$

$$(29.3)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x\,\mathrm{sen}\,(x^3+xy) - (3x^2+y)^2\cos(x^3+xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2\cos(x^3+xy) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\,\mathrm{sen}\,(x^3+xy) - x(3x^2+y)\cos(x^3+xy) \end{cases} \qquad (29.4)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2+4x^2)e^{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2+4y^2)e^{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4xye^{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$[32]\begin{cases} (32.1)\ -2\,\mathrm{sen}\,t\cos t \qquad (32.2)\ \dfrac{e^t(-1+t\ln t)}{t[e^{2t}+(\ln t)^2]} \\ \\ (32.3)\ \dfrac{t[2\ln t - 1]}{(\ln t)^2}\sec^2\left(\dfrac{t^2}{\ln t}\right)^2 \end{cases}$$

[33]

$$(33.1)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = 16t - 10s \\ \dfrac{\partial z}{\partial s} = -10t - 6s \end{cases} \qquad (33.2)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = 2\sec^2 t . e^{2 \operatorname{tg} t} \\ \dfrac{\partial z}{\partial s} = 0 \end{cases}$$

$$(33.3)\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{s^2(e^{2t} - e^{-2t})}{\sqrt{1 + s^2e^{2t} + s^2e^{-2t}}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{s(e^{2t} + e^{-2t})}{\sqrt{1 + s^2e^{2t} + s^2e^{-2t}}} \end{cases}$$

[34] $\{$ (34.1) 4 (34.2) -4

[35]17

[36] $\left\{ \dfrac{\partial g}{\partial u}(4,8) = 10 \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial g}{\partial v}(4,8) = -2 \right.$

[37] $\left\{ (37.1)\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,3) = 2 \qquad (37.2)\ \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1) = \dfrac{17}{6} \text{ e } \dfrac{\partial h}{\partial v}(0,1) = -54 \right.$

[38] $\dfrac{-z^{1/3}}{3x^{1/3}}$

[39] $\dfrac{-\pi^2}{16} - 1$

[40] $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,0) = \dfrac{-1}{\ln 2}$

[42]

$$(42.1)\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{6} \end{cases} \qquad (42.2)\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 18 \\ x - 1 = 2y - 4 = 3z - 9 \end{cases}$$

$$(42.3)\begin{cases} \pi x + 18y - \pi z = 6\pi \\ \dfrac{x-1}{\pi} = \dfrac{y - \frac{\pi}{6}}{18} = -\dfrac{z+2}{\pi} \end{cases} \qquad (42.4)\begin{cases} z = 8 \\ (x,y,z) = (2,2,8) + t(0,0,1);\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(42.5)\begin{cases} z - x = 0 \\ (x,y,z) = (1,1,1) + t(1,0,-1);\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

[43] $x + 6y - 2z - 3 = 0$

[44] $x + 4y + 6z = 21$ e $x + 4y + 6z = -21$

[45] $\begin{cases} (45.1)\ 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j};\ x + y - 2 = 0 \\ (45.2)\ 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j};\ 4x + y - 3 = 0 \end{cases}$

[46] $\begin{cases} (46.1)\ \left(-66, 107, \dfrac{143}{6}\right) \\ (46.2)\ (6, 4, -6) \end{cases}$