Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática

DISCIPLINA: MATA03 - CÁLCULO B

UNIDADE III - LISTA DE EXERCÍCIOS

Atualizado 2010.2

Derivada direcional e gradiente

[1] Calcule o gradiente das seguintes funções:

(1.1) $z = 2x^2 + 5y^2$ (1.2) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

(1.3) $z = x^2 + y^2 \text{ sen } (xy)$ (1.4) $z = e^{2x-3y} \cos(2x) \cos(3y)$

[2] Determine a derivada direcional da função dada na direção $\vec{v}$:

(2.1) $z = 2x^2 + 5y^2, \ \vec{v} = \Big(\cos(\frac{\pi}{2}), \text{ sen } (\frac{\pi}{2}) \Big)$

(2.2) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}, \ \vec{v} = (1, 1)$

(2.3) $z = y^2 \text{ tg }^2(x), \ \vec{v} = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)$

[3] Determine o valor máximo da derivada direcional da função f no ponto dado e a direção em que ocorre:

(3.1) $z = 2x^2 + 3y^2, \ P = (1, -1)$

(3.2) $z = e^{2y} \text{ arctg}\Big(\dfrac{y}{3x}\Big), \ P = (1, 3)$

(3.3) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \ P = (1, 1)$

[4] A temperatura num ponto (x, y) de uma placa de metal é dada, em graus Celsius, por

$$T(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

Suponha que uma formiga se encontra no ponto de coordenadas $(1, 1)$.

(4.1) Indique a direção que a formiga deve tomar para se manter com a mesma temperatura.

(4.2) Se num dado momento a formiga sentir frio, qual a direção e o sentido que deve tomar para que possa aquecer mais rapidamente?

[5] Uma equação da superfície de uma montanha é $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$, a distância está em metros, os pontos do eixo x a leste e os pontos do eixo y a norte. Um alpinista está no ponto correspondente a $(-10, 5, 850)$.

(5.1) Qual é a direção da parte que tem inclinação mais acentuada?

(5.2) Se o alpinista se mover na direção leste ele estará subindo ou descendo, e qual será esta razão?

(5.3) Se o alpinista se mover na direção sudoeste, ele estará subindo ou descendo, e qual será esta razão?

(5.4) Em qual direção ele estará percorrendo um caminho plano?

[6] Uma chapa de metal aquecida em um plano xy de tal modo que a temperatura T é inversamente proporcional à distância da origem. Se a temperatura em $P(3,4)$ é $100°$, determine a taxa de variação de T em P na direção do vetor $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Em que direção e sentido T cresce mais rapidamente em P? Em que direção a taxa de variação é nula?

Pontos Críticos

[7] Determine e classifique os pontos críticos de:

(7.1) $z = e^{1+x^2+y^2}$

(7.2) $z = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$

(7.3) $z = (x^2 - 1)(y^2 - 4)$

(7.4) $z = \dfrac{1}{x} - \dfrac{64}{y} + xy$

(7.5) $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 4}$

(7.6) $z = 6y^2 - 8x^2 + \dfrac{1}{3}y^3 - \dfrac{1}{4}y^4$

(7.7) $z = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$

(7.8) $z = y^2x + 2yx + 2x^2 - 3x$

[8] Determine os pontos extremos de:

(8.1) $z = 25 - x^2 - y^2$ tais que $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

(8.2) $z = x^2 + 2xy + y^2$ tais que $x - y = 3$.

(8.3) $z = 4x^2 + 2y^2 + 5$ tais que $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

[9] Determine os pontos na superfície $g(x,y) = 4xy - 3y^2 = 1$ que são proximo à origem $(0,0)$.

[10] Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange,

(10.1) Mostre que o retângulo com área maxima com perimetro fixo é um quadrado

(10.2) Calcule a área máxima de um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenadas e inscrito na região limitada pelo eixos e pela reta $x + 2y = 2$.

(10.3) Determine o retângulo de perímetro máximo (com lados paralelos aos eixos) que pode ser inscrito na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

Integração Dupla

[11] Esboce a região de integração e inverta a ordem nas seguintes integrais:

(11.1) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{y/2} f(x,y)\, dxdy$ (11.2) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\, dydx$ (11.3) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\, dydx$

[12] Esboce a região de integração, inverta a ordem e calcule as seguintes integrais:

(12.1) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y}} \frac{\text{sen}\,(\pi x)}{1-x}\, dxdy$ (12.2) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 y e^{x^3}\, dxdy$ (12.3) $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\, dxdy$

[13] Calcule $\displaystyle\int\int_R f(x,y)\, dA$, onde:

(13.1) $f(x,y) = xe^{xy}$; R é a região $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$

(13.2) $f(x,y) = x \cos{(xy)}$; R é a região $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \pi/2\}$

(13.3) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$; R é a região $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$

[14] Calcule as seguintes integrais, sabendo que R é a região delimitada pelas curvas dadas:

(14.1) $\displaystyle\int\int_R (8-x-y)\, dxdy$, $R : \{y = x^2 \text{ e } y = 4.$

(14.2) $\displaystyle\int\int_R (x+y)\, dxdy$, $R : \{y = x^2+1,\ y = -x^2-1,\ x = -1 \text{ e } x = 1.$

(14.3) $\displaystyle\int\int_R \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) dxdy$, $R : \{y = x,\ y = 2x,\ x = 1 \text{ e } x = 2.$

[15] Transforme as seguintes integrais para coordenadas polares e calcule-las:

(15.1) $\displaystyle\int\int_R \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdy$, $R : \{1 \leq x^2+y^2 \leq 4$

(15.2) $\displaystyle\int\int_R xy\, dxdy$, $R : \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4$

(15.3) $\displaystyle\int\int_R \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdy$, $R : \{(x-a)^2+y^2 \leq a^2.$

(15.4) $\displaystyle\int\int_R (1-x^2-y^2)\, dxdy$, $R : \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x = 0,\ y = x,\ x^2+y^2 = 1.$

[16] Calcule, usando **integral dupla**, a área da região R delimitada pelas curvas abaixo. Esboce os gráficos:

(16.1) $y = x^3,\ y = -x+2$ e $y = 0$ (16.2) $y = e^{x-1},\ y = x$ e $x = 0$

(16.3) $x = y^2+1$ e $x = -y+3$ (16.4) $x = y^2,\ y = x+3,\ y = -2$ e $y = 3$

[17] Determine, usando **integral dupla**, a área da região no primeiro quadrante delimitada pela curva polar $r = 2 + \cos\theta$ e as curvas cartesianas $y = x$ e $y = 0$.

[18] Calcule, usando **integral dupla**, o volume:

(18.1) do tetraedro limitado no 1º octante pelo plano $\dfrac{z}{3}+\dfrac{x}{2}+y=1$.

(18.2) do sólido limitado pela superfície $f(x,y)=4-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}$, os planos $x=3$ e $y=2$ e os três planos coordenadas.

(18.3) do sólido do 1º octante delimitado pelos planos coordenadas, pelo parabolóide $z=x^2+y^2-1$ e pelo plano $2x+y=2$.

(18.4) do sólido limitado pelo plano $z=0$ e pelo parabolóide $z=1-x^2-y^2$ (use coordenadas polares).

Campos Vetoriais

[19] Descreva geometricamente os seguintes campos de vetores definidos em $\mathbb{R}^2$:

(19.1) $\overrightarrow{F}(x,y)=x^2\overrightarrow{j}$ (19.2) $\overrightarrow{F}(x,y)=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ (19.3) $\overrightarrow{F}(x,y)=-y\overrightarrow{i}+x\overrightarrow{j}$

[20] Calcule a divergência dos seguintes campos vetoriais:

(20.1) $\overrightarrow{F}(x,y)=(xy^2,\ e^{x^2+y^2})$

(20.2) $\overrightarrow{F}(x,y)=\Big(\cos(x+y),\ \ \text{sen}\,(\pi xy)\Big)$

(20.3) $\overrightarrow{F}(x,y)=(\text{sen}^2 x,\ 2\cos x)$

[21] Verifique se os seguintes campos vetoriais são conservativos e, em caso afirmativo, calcule o potencial:

(21.1) $\overrightarrow{F}(x,y)=(2x\,\text{sen}\,y+4e^x,\ \ \cos x)$

(21.2) $\overrightarrow{F}(x,y)=(e^y,\ xe^y+y)$

(21.3) $\overrightarrow{F}(x,y)=(3x^2+2y^2,\ 4xy+6y^2)$

(21.4) $\overrightarrow{F}(x,y)=(e^{xy}+xye^{xy},\ x^2e^{xy})$

Integrais Curvilíneas

[22] Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada:

(22.1) $\displaystyle\int_C (y/x)\,ds,\qquad C: x=t^4,\ y=t^3,\ \frac{1}{2}\le t\le 1$

(22.2) $\displaystyle\int_C (2\cos x+3y)\,ds,\qquad C: x=t,\ y=2t,\ e\le t\le e^2$

(22.3) $\displaystyle\int_C (xy^4)\,ds,\qquad C$ é a metade direita do círculo $x^2+y^2=16$

(22.4) $\displaystyle\int_C xy\,dx+(x-y)\,dy,\qquad C$ consiste nos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(2,0)$ e de $(2,0)$ a $(3,2)$

[23] Mostre que as integrais a seguir não dependem do caminho C escolhido. Calcule essas integrais.

(23.1) $\displaystyle\int_C (2x \text{ sen } y)\, dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\, dy,$ onde C é qualquer caminho de $(-1,0)$ a $(3,2)$.

(23.2) $\displaystyle\int_C (-e^x \cos y)\, dx + (e^x \text{ sen } y)\, dy,$ onde C é qualquer caminho de $(0,0)$ a $(2,1)$.

[24] Calcule $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\gamma$ em cada um dos seguintes casos:

(24.1) $\overrightarrow{F}(x,y) = x^2\overrightarrow{i} + (x-y)\overrightarrow{j}, \quad \gamma(t) = (t, \ \text{sen } (t)),\ 0 \le t \le \pi$

(24.2) $\overrightarrow{F}(x,y) = x^2\overrightarrow{j}, \quad \gamma(t) = (t^2, \ 3),\ -1 \le t \le 1$

(24.3) $\overrightarrow{F}(x,y) = (x-y)\overrightarrow{i} + (x+y)\overrightarrow{j}, \quad \gamma(t) = (3t+2, \ 5t-4),\ -1 \le t \le 1$

[25] Calcule o trabalho do campo $\overrightarrow{F} = x^2\overrightarrow{i} + (y^3 + e^y + x)\overrightarrow{j}$ ao longo do semi-circulo C de centro $(0,0)$ que vai de $(1,0)$ a $(-1,0)$.

[26] Calcule o trabalho do campo $\overrightarrow{F} = (ye^{x^2} + \cos(x^2))\overrightarrow{i} + (x^2 - \text{tg}\,(y^2))\overrightarrow{j}$ ao longo da fronteira do triângulo dado pelos pontos $(0,0),\ (1,0)$ e $(1,1)$ orientada no sentido horário.

Teorema de Green

[27] Utilize o Teorema de Green para calcular as seguintes integrais de linha:

(27.1) $\displaystyle\oint_C \frac{-x^2 y}{1+x^2}\, dx + \text{arctg}x\, dy,$ onde C é o caminho fechado formado por $y=0,\ x=1,$ $y=1,\ x=0.$

(27.2) $\displaystyle\oint_C x\, dx + xy\, dy,$ onde C é o caminho fechado formado por $y=0,\ x^2+y^2=1$ $(x, y \ge 0),\ x=0.$

(27.3) $\displaystyle\oint_C -y^3\, dx + x^3\, dy,$ onde C é o caminho fechado formado por $y = x^3$ e $y = x$.

(27.4) $\displaystyle\oint_C (x^2 - y)\, dx + x\, dy,$ onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

(27.5) $\displaystyle\oint_C (-y^2 + \text{arctg}x)\, dx + \ln x\, dy,$ onde C é o caminho fechado formado por $y = x^2$ e $x = y^2$.

[28] Se R for uma região plana qualquer á qual se aplica o Teorema de Green, mostre que a área A de R é dada pela formula

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\partial R} -y\, dx + x\, dy \qquad (*)$$

Use a fórmula $(*)$ para calcular a área das regiões limitadas pelas curvas dadas:

(28.1) $y = 3x$ e $y^2 = 9x$.

(28.2) $y = 0,\ x + y = a\ (a > 0),\ x = 0$.

(28.3) o eixo x e o arco da ciclóide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta),\ y = a(1 - \cos\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

(28.4) $x = a\cos^3\theta$ e $y = a\operatorname{sen}^3\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

[29] Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^2, xy)$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ no sentido anti-horário.

[30] Considere o campo vetorial $\overrightarrow{v}(x,y) = -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ e região R limitada pela curva $\gamma : t \in [0, 2\pi] \to (1 + \cos t,\ \operatorname{sen} t)$. Calcule a circulação de $\overrightarrow{v}$ sobre γ.

Respostas

[1]

(1.1) $\nabla(z) = 2(2x\ ,\ 5y)$ (1.2) $\nabla(z) = \dfrac{-2}{(x^2+y^2)^2}\Big(x\ ,\ y\Big)$

(1.3) $\nabla(z) = \Big(2x + y^3\cos(xy)\ ,\ 2y\operatorname{sen}(xy) + xy^2\cos(xy)\Big)$

(1.4) $\nabla(z) = e^{2x-3y}\Big(2\cos(3y)\Big(\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)\Big)\ ,\ -3\cos(2x)\Big(\cos(3y) + \operatorname{sen}(3y)\Big)\Big)$

[2] (2.1) $10y$ (2.2) $\dfrac{-2\sqrt{2}(x+y)}{(x^2+y^2)^2}$ (2.3) $-y\operatorname{tg}x(\sqrt{3}y\sec^2 x - \operatorname{tg}x)$

[3]

(3.1) $2\sqrt{13}\ ,\ \vec{v} = (4, -6)$ (3.2) $\dfrac{e^6}{6}\sqrt{9\pi^2 + 6\pi + 10}\ ,\ \vec{v} = \dfrac{e^6}{6}(3,\ 3\pi + 1)$

(3.3) $1,\ \vec{v} = \Big(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$

[4] (4.1) $\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ ou $\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ (4.2) $\Big(-\dfrac{1}{9},\ -\dfrac{1}{9}\Big)$

[5]

(5.1) $\Big(\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\Big)$ (5.2) subindo a 60 m por m

(5.3) descendo a $20\sqrt{2}$ m por m (5.4) $\Big(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \dfrac{3}{\sqrt{10}}\Big)$ ou $\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ -\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Big)$

[6] $-\dfrac{28}{\sqrt{2}}\ ;\ (-12, -16)\ ;\ \lambda(4\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j})\ ;\ \lambda \neq 0$

[7]
- (7.1) $(0,0)$ ponto min
- (7.2) $\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$ ponto min
- (7.3) $(0,0)$ max ; $(1,2), (1,-2), (-1,2), (-1,-2)$ selas
- (7.4) $\left(-\dfrac{1}{4}, 16\right)$ ponto max.
- (7.5) $(-2,0)$ ponto min; $(2,0)$ ponto max
- (7.6) $(0,0)$ sela; $(0,-3)$ e $(0,4)$ max. locais
- (7.7) $(1,2)$ ponto min.
- (7.8) $(0,1)$ e $(0,-3)$ selas ; $(1,-1)$ min. local

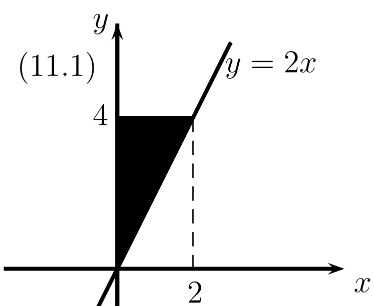
[8] (8.1) $(0,0)$, $(0,4)$ (8.2) $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ (8.3) $(0,0)$, $(0,2)$

[9] $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

[10] (10.2) $\dfrac{1}{2}$ (10.3) lados $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ e $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

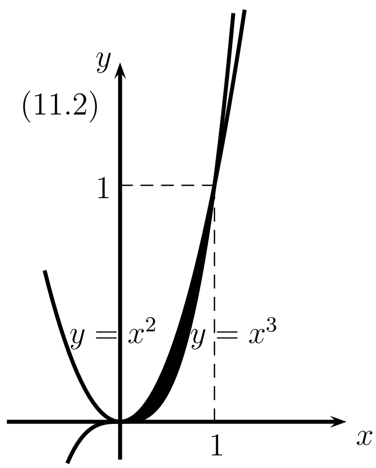
[11]

(11.1)



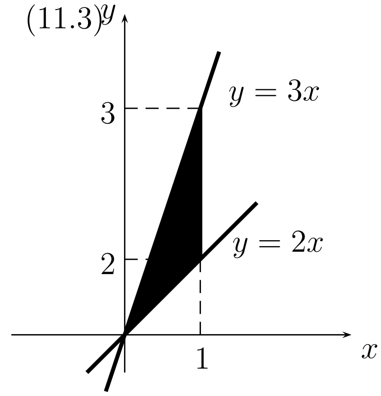
$$\int_0^2 \int_{2x}^4 f(x,y)\ dydx$$

(11.2)



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\ dxdy$$

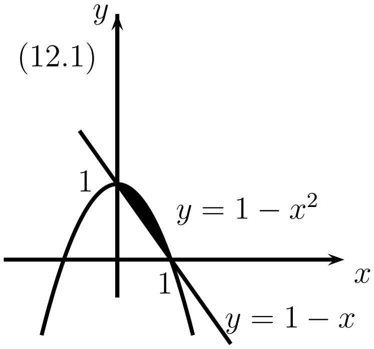
(11.3)



$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\ dxdy + \int_2^3 \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\ dxdy$$

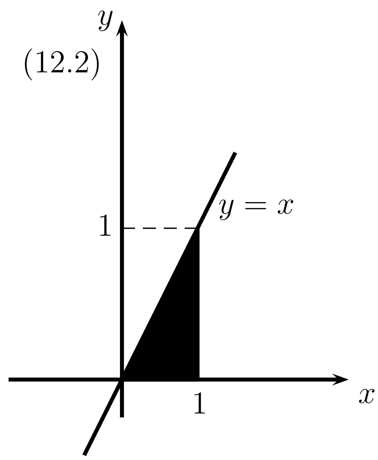
[12]

(12.1)



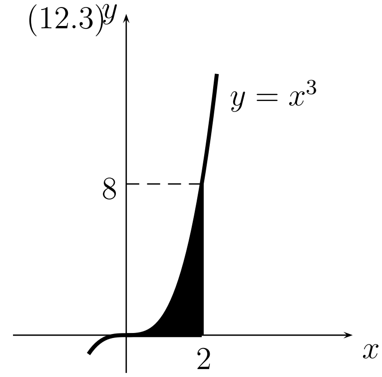
$$\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} \frac{\text{sen }(\pi x)}{1-x}\, dydx = \frac{1}{\pi}$$

(12.2)



$$\int_0^1 \int_0^x ye^{x^3}\, dydx = \frac{e-1}{6}$$

(12.3)



$$\int_0^2 \int_0^{x^3} \sqrt{x^4+1}\, dydx = \frac{17\sqrt{17}-1}{6}$$

[13] $\Big\{$ (13.1) $e^3 - e - 2$ (13.2) $\dfrac{4}{\pi}$ (13.3) $\dfrac{3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1}{3}$

[14] $\Big\{$ (14.1) $\dfrac{896}{15}$ (14.2) 0 (14.3) $\left(\text{arctg}(2) - \dfrac{\pi}{4}\right)\ln 2$

[15] $\Big\{$ (15.1) 2π (15.2) $\dfrac{15}{8}$ (15.3) $4a$ (15.4) $\dfrac{\pi}{16}$

[16] $\Big\{$ (16.1) $\dfrac{3}{4}$ (16.2) $\dfrac{e-2}{2e}$ (16.3) $\dfrac{9}{2}$ (16.4) $\dfrac{145}{6}$

[17] $\dfrac{9\pi + 16\sqrt{2} + 2}{16}$

[18] $\Big\{$ (18.1) 1 (18.2) $\dfrac{43}{2}$ (18.3) $\dfrac{11}{6}$ (18.4) $\dfrac{\pi}{2}$

[20] $\Big\{$ (20.1) $y^2 + 2ye^{x^2+y^2}$ (20.2) $-$ sen $(x+y) + \pi x \cos(x+y)$ (20.3) sen $(2x)$

[21] $\left\{ \begin{array}{l} \text{(21.1) não conservativo} \\ \text{(21.2) conservativo; } f(x,y) = xe^y + \dfrac{y^2}{2} + k,\ k \text{ é constante} \\ \text{(21.3) conservativo; } f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + 2y^3 + k,\ k \text{ é constante} \\ \text{(21.4) conservativo; } f(x,y) = xe^{xy} + k,\ k \text{ é constante} \end{array} \right.$

$$[22]\left\{\begin{array}{ll} (22.1)\ \dfrac{125-13\sqrt{13}}{48} & (22.2)\ \sqrt{5}\Big(2\ \text{sen}\ (e^2)+3e^4-3e^2-2\ \text{sen}\ e\Big) \\ (22.3)\ \dfrac{8192}{5} & (22.4)\ \dfrac{17}{3} \end{array}\right.$$

$$[23]\left\{\ (23.1)\ 9\ \text{sen}\ (2)-6 \qquad (23.2)\ -e^2\cos(1)+1\right.$$

$$[24]\left\{\ (24.1)\ \frac{\pi^3}{3}-2 \qquad (24.2)\ 0 \qquad (24.3)\ 16\right.$$

$[25]\ \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $[26]\ -\dfrac{7}{6}+\dfrac{e}{2}$

$$[27]\left\{\ (27.1)\ 1 \qquad (27.2)\ \frac{1}{3} \qquad (27.3)\ \frac{5}{42} \qquad (27.4)\ 18\pi \qquad (27.5)\ \frac{9}{5}\right.$$

$$[28]\left\{\ (28.1)\ \frac{1}{2} \qquad (28.2)\ \frac{a^2}{2} \qquad (28.3)\ 3\pi a^2 \qquad (28.4)\ \frac{3a^2\pi}{8}\right.$$

[29] 0 $\qquad$ [30] 2π