Lista n°1

Exercício 1

a. Provar que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.
b. Provar que par $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.
c. Provar que $(C^0(\mathbb{R}), +, \cdot)$, onde $C^0(\mathbb{R})$ é o espaço da funções continuas de $\mathbb{R}$ à valores em $\mathbb{R}$, é um espaço vetorial.
d. Provar que $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ é um espaço vetorial, onde $\mathbb{R}[X]$ é o espaço dos polinomios.

Exercício 2

Verificar se os conjuntos F seguintes são subespaços vetoriais dos espaços vetoriais E ?
a. $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\, P(0) = 3\}$ e $E = \mathbb{R}[X]$.
b. $F = \{f \in C^0(\mathbb{R}),\, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\}$ e $E = C^0(\mathbb{R})$.
c. $F = \{f \in C^0(\mathbb{R}),\, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\}$ e $E = C^0(\mathbb{R})$.
d. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, xy = 0\}$ e $E = \mathbb{R}^2$.
e. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \{0\},\, xy = 0\}$ e $E = \mathbb{R} \times \{0\}$.
f. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\, x + y - z + 2t = 0\}$ e $E = \mathbb{R}^4$.
g. $F = \{f \in C^0(\mathbb{R}),\, f(1) = f(2)\}$ e $E = C^0(\mathbb{R})$.
h. $F = \{f \in C^2(\mathbb{R}),\, f'' + 2f' - 4f = 0\}$ e $E = C^2(\mathbb{R})$, onde $C^2(\mathbb{R})$ é o espaço da funções duas vezes deriváveis de $\mathbb{R}$ a valores em $\mathbb{R}$.

Exercício 3

Seja $\mathbb{R}_n[X]$ o espaço dos polinomios de grau menor ou igual a n e seja $\mathbb{R}_{=n}[X]$ o espaço dos polinomios de grau exatamente igual a n. Verificar se os conjuntos $\mathbb{R}_n[X]$ e $\mathbb{R}_{=n}[X]$ são subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}[X]$.

Exercício 4

Sejam $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 2x\}$ e $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + 3y = 0\}$.
a. Provar que F e G são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$.
b. Achar $F \cap G$.
c. Provar que F e G são complementares em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 5

Sejam $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y + 3z = 0\}$ e $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 3x - z = 0\}$.
a. Provar que F e G são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.
b. Achar $F \cap G$.
c. F e G são complementares em $\mathbb{R}^3$?

Exercício 6

Sejam $F = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y = 0\}$ e $G = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - z = 0\}$.
a. Provar que F e G são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.
b. Achar $F \cap G$.

c. F e G são complementares em $\mathbb{R}^3$?

Exercício 7

Seja E o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Seja F o conjunto das funções constantes e G o conjunto das funções que se anulam em 0.

a. Provar que F e G são subespaços vetoriais de E.

b. Provar que F e G são complementares em E.

Exercício 8

Seja E o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Seja F o conjunto das funções pares et G o conjunto das funções impares.

a. Verificar que F e G são subespaços vetoriais de E.

b. Achar $F \cap G$.

c. Para $f \in E$, definimos $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ e $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. Verificar que $g \in F$ e $h \in G$.

d. Provar que F e G são complementares em E.

Exercício 9

Seja $E = C^1(\mathbb{R})$ o espaço da funções deriváveis de $\mathbb{R}$ a valores em $\mathbb{R}$. Seja

$$F = \{f \in E;\ f(0) = f'(0) = 0\},$$

e

$$G = \{f \in E;\ \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x + \mu\}.$$

a. Verificar que F e G são subespaços vetoriais de E.

b. Achar $F \cap G$.

c. Para $u \in E$, achar duas funções $f \in F$ e $g \in G$ tais que $u = f + g$.

d. Provar que F e G são complementares em E.