Lista n°3

Exercício 1

Verificar se as funções abaixo definem um produto interno no espaco vetorial E indicado :

a. $< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1 x_2 + y_1 y_2$ em $\mathbb{R}^2$

b. $< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1^2 x_2 - y_2$ em $\mathbb{R}^2$

c. $< P, Q >=< a_0 + a_1 x + a_2 x^2, b_0 + b_1 x + b_2 x^2 >= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$ em $\mathbb{R}_2[X]$.

d. $< P, Q >= P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ em $\mathbb{R}_2[X]$.

e. $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$ em $C^0([a,b])$, conjunto das funções continuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$.

f. $< f, g >= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ em $C^0([a,b])$.

Exercício 2

Calcular $< u, v >$, $\|u\|$, $\|v\|$ e o angulo entre u e v :

a. $u = (2, 1, -5)$, $v = (-10, 0, -4)$ com o produto usual em $\mathbb{R}^3$;

b. $u = (4, 0, 2, -8)$, $v = (-2, 2, -4, -6)$ com o produto usual em $\mathbb{R}^4$;

c. $u = \mathrm{sen}(x)$, $v = \cos(x)$ com o produto definido no exercicio 1)e) ;

d. $u = x - 1$, $v = (x-1)^2$ com o produto definido no exercicio 1)c) ;

e. $u = x - 1$, $v = (x-1)^2$ com o produto definido no exercicio 1)d).

Exercício 3

Nos exemplos seguintes, verificar que se as familias dadas são base ortogonal do espaço E :

a. $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ com $E = \mathbb{R}^3$ munido do produto usual ;

b. $\{(1,0,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$ com $E = \mathbb{R}^3$ munido do produto usual ;

c. $\{(1,1,1), (-2,1,1), (0,-1,1)\}$ com $E = \mathbb{R}^3$ munido do produto usual ;

d. $\{1, x, x^2\}$ com $E = \mathbb{R}_2[X]$ munido do produto definido no exercicio 1)c) ;

e. $\{(x^2 - 2x, x^2 - 1\}$ com $E = \mathbb{R}_2[X]$ munido do produto definido no exercicio 1)d).

Exercício 4

Seja $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ e $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$. Calcular $F^\perp$ e $E^\perp$.

Exercício 5

Seja E um espaço vetorial de dimensão n com um produto interno. Seja F um subespaço vetorial de E de dimensão k (com $k < n$) e seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ uma base ortogonal de F. Provar que :

a. Para todo $u \in E$, o vetor $v = u - \sum_{i=1}^{k} < u, e_i > .e_i$ pertence a $F^\perp$.

b. Provar que $E = F \oplus F^\perp$.

Exercício 6

Seja E um espaço vetorial com um produto interno. Sejam F e G dois subespaços vetoriais de E. Provar que :

a. Se $F \subset G$ então $G^\perp \subset F^\perp$;

b. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;

c. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.