Lista n°4

Exercício 1

Verificar se as aplicações seguintes de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são transformações lineares :

a. $f(x,y,z) = (x+2y, 0, z-2x)$

b. $g(x,y,z) = (z+x, z+2, -z)$

c. $h(x,y,z) = (x+z, x-y-z, 2y)$

d. $k(x,y,z) = (y, xy, y)$

e. $l(x,y,z) = (0,0,0)$

f. $p(x,y,z) = (0,2,0)$

Exercício 2

Provar que as aplicações seguintes são transformações lineares e achar o nucleo e a imagem :

a. $\left\{ \begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x-y+z) \end{array} \right.$

b. $\left\{ \begin{array}{lcl} g : \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \rightarrow & (x-2y+2z+t, x-3y-z, t+2z) \end{array} \right.$

Exercício 3

Sejam E e F dois espaços vetoriais e $f : E \rightarrow F$ uma transformação linear.

a. Provar que $\mathrm{Ker}f$ é um subespaço vetorial de E.

b. Usando a questão a), provar que $G := \{(x,y)\,,\, 3x+y=0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

c. Usando a questão a), provar que $H := \{(x,y,z)\,,\, x+y+z=0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

d. Provar que $L := \{(x,y,z,t)\,,\, 3x-y=z+2t=0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

Exercício 4

Seja

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \rightarrow & \psi(P) \end{array}$$

com $\psi(P)$ definido por $\psi(P)(x) = 2xP(x) - (x^2+1)P'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a. Provar que ψ é bem definida e que ψ é uma transformação linear.

b. Achar o nucleo e a imagem de ψ.

Exercício 5

Sejam E, F e G tres espaços vetoriais , $f \in \mathcal{L}(E,F)$ e $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Provar que :

a. $g \circ f$ é linear.

b. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}g)$

c. $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$

d. $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}f)$

e. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}g$

f. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}f \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}g \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$

Exercício 6

Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ uma transformação linear definida por

$$f(1,1,0,0) = -1,\ f(0,1,1,0) = 1,\ f(0,0,1,1) = 0,\ f(1,0,0,2) = -1.$$

Seja $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, calcular $f(x)$ e achar Ker f. A transformação f é injetora ?

Exercício 7

Sejam E um espaço vetorial de dimensão 4 e (e_1, e_2, e_3, e_4) uma base de E. Sejam F um espaço vetorial de dimensão 3 e (f_1, f_2, f_3) uma base de F. Seja $g : E \to F$ uma transformação linear definida por :

$$\begin{array}{rcl} g(e_1) & = & 2f_1 - f_2 + 3f_3 \\ g(e_2) & = & -f_1 + 2f_2 \\ g(e_3) & = & f_1 + 3f_2 + 5f_3 \\ g(e_4) & = & 5f_1 - 4f_2 + 6f_3 \end{array}$$

a. Para $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, escrever $g\left((x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4)\right)$ na base (f_1, f_2, f_3).

b. Achar uma base de Img e calcular $\dim(\mathrm{Im}(g))$.

c. g é sobrejetora ? g é injetora ?

d. Achar uma base de Ker$g$.

e. Seja $H := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in E\,,\ x_1 = x_2 \,\mathrm{e}\, x_3 = x_4 \right\}$. Achar uma base de H e achar $g(H)$.

Exercício 8

Sejam E e F dois espaços vetoriais de dimensão finita e sejam $f \in \mathcal{L}(E, F)$ e $g \in \mathcal{L}(E, F)$. Provar que $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$ e provar que :

$$\dim(\mathrm{Im}(f + g)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$$

Exercício 9

Seja E um espaço vetorial de dimensão 3 e seja $g : E \to E$ uma transformação linear tal que $f \neq 0$ e $f \circ f = 0$.

a. Provar que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}f$.

b. Provar que se $f \neq 0$ então $\dim(\mathrm{Im}f) \geq 1$

c. Achar as dimensões de $\mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Ker}f$.