Lista n°5

Exercício 1

Sejam as matrizes seguintes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calcular AB e BA.
b. Calcular AC e CA.
c. Calcular $(A+B)^2$.
d. Calcular $A^2 + 2AB + B^2$.
e. Calcular D^2 e D^3.

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + x_3, x_1 - x_3)$ para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a. Achar a matriz A de f em relação á base canonica de $\mathbb{R}^3$.
b. Calcular o determinante de A.
c. f é injetora ?

Exercício 3

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear de matriz A em relação as bases canonicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear de matriz A em relação as bases canonicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^4$, com :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a. Calcular $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^3$.
b. Calcular $g(y)$ para $y \in \mathbb{R}^2$.
c. Achar a matriz de $g \circ f$ em relação as bases canonicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

Exercício 4

Seja M a matriz da tranformação linear T em relação a base canonica de $\mathbb{R}^3$:

$$M = \begin{pmatrix} -17 & 18 & -27 \\ -14 & 15 & -21 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Provar que T é uma projeção (ou seja, $T \circ T = T$).

Exercício 5

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear de matriz A em relação a base canonica de $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Provar que f é bijetora.

b. Calcular A^{-1}.

c. Determinar T^{-1}.

Exercício 6

Seja $E = \mathbb{R}_3[X]$ o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 3. Definimos T e S duas transformações de E em E por $T(P) = P'$ e $S(P) = P - P'$, onde P' é a derivada de P.

a. Provar que T e S são lineares.

b. Escrever as matrizes das tranformações T e S bem relação a base canonica de $\mathbb{R}_3[X]$ ($B = \{1, x, x^2, x^3\}$).

c. Provar que S é bijetora.

d. Provar que $T \circ T \circ T \circ T = 0$.

e. Provar que $S^{-1} = Id + T + T \circ T + T \circ T \circ T$.

Exercício 7

Seja $\theta \in \mathbb{R}$ e seja

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\text{sen}n\theta \\ \text{sen}n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$