Prova n°1

Avisos : Celulares desligados ; 3h de prova !
Só terá validade o que estiver a caneta !

Lembrete :
Uma sequencia $(x_n)_n$ é chamada de sequencia de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k$ e se $m > k$ então $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Teorema 1 *Uma sequencia em $\mathbb{R}^n$ é convergente se e somente se é uma sequencia de Cauchy.*

Questão 1

Enunciar e provar o Teorema do Valor Médio para funções de varias variáveis.

Questão 2

Provar que se um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é conexo então ele é conexo por caminhos.
Dica : para um ponto $a \in A$ voce pode olhar o conjunto de todos os pontos de A ligados a a por um caminho contido em A.

Questão 3

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Suponhamos que existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $h \in \mathbb{R}^n$

$$\langle df_x(h), h\rangle \geq \alpha\langle h, h\rangle.$$

a. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^n$ e $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $P(x) = \langle x, b - a\rangle$. Calcular $dP_x(h)$ para todo $x, h \in \mathbb{R}^n$.

b. Usando a função $t \to \varphi(t) = \langle f(a + t(b - a)), b - a\rangle$, provar que para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\langle f(b) - f(a), b - a\rangle \geq \alpha\langle b - a, b - a\rangle.$$

c. Provar que f é uma aplicação fechada (ou seja, a imagem de todo fechado é fechada).

d. Provar que df_x é um isomorfismo do $\mathbb{R}^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

e. Provar que f é um difeomorfismo global de classe C^1.

Questão 4

Provar que existe uma função φ, definida num intervalo $I \ni 0$, tal que para todo $x \in I$, o par $(x, \varphi(x))$ seja solução da equação $\cos(x) + \operatorname{sen}(y) + x + y - 1 = 0$. Calcular o polinômio de Taylor de grau 2 da função φ.