Lista 1

Exercício 1

a. Calcular o polinomio de Taylor de ordem 1 em $(0,0)$ para a função f definida por

$$f(x,y) = e^{ax+by} - \cos(cx+dy)$$

com a, b, c, d numeros reais.

b. Existem numeros reais a, b, c, d tais que f não muda de sinal numa vizinhança de $(0,0)$.

Exercício 2

Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = xy^2$.

a. Calcular o polinomio de Taylor de ordem 3 para f num ponto (x_0, y_0).

b. Calcular o polinomio de Taylor de ordem 3 para f em $(0,0)$.

Exercício 3

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = (e^x \cos y) - 1.$$

a. Verificar que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

b. Provar que podemos escrever f da forma

$$f(x,y) = T_2(x,y) + R(x,y)$$

com T_2 um polinomio de grau 2 e R tal que existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $\|(x,y)\| \leq 1$ temos

$$|R(x,y)| \leq C\|(x,y)\|^3.$$

c. Estudar a convergencia da série $\sum_{n=1} f(z_n)$ com $z_n = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercício 4

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$f(x,y,z) = (ze^{x+y} + \operatorname{sen}(x), \ln(1+z) + \arctan(y)).$$

Calcular o polinomio de Taylor de ordem 1 de f em $(0,0,0)$.