Lista n°5

Exercício 1

Seja C a curva obtida como interseção do circulo $x^2 + y^2 = 1$ com o primeiro quadrante.

Calcular $\int_C xy^2 \mathrm{d}s$.

Exercício 2

Seja C a curva obtida como interseção da semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4, y \geq 0$ com o plano $x + z = 2$.

Calcular $\int_C xy \mathrm{d}s$.

Exercício 3

Seja C a curva obtida como interseção da região $A = \{x^2 + y^2 + z^2 = 8 - 2(x+y), z \geq 0\}$ com o plano $x + y = 2$.

Calcular $\int_C (x^2 + y^2) z \mathrm{d}s$.

Exercício 4

Seja C o arco da curva obtida como interseção das superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $y = x$, que liga o ponto $(0, 0, 2)$ ao ponto $(1, 1, \sqrt{2})$.

Calcular $\int_C z \mathrm{d}s$.

Exercício 5

Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2. Provar que

a. $\mathrm{rot}(\nabla f) = \vec{0}$;

b. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\overrightarrow{F}) = 0$;

c. $\mathrm{div}(\nabla f) = \Delta f$ com Δf o laplaciano de f, ou seja $\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$;

d. $\nabla . \left(f\overrightarrow{F} \right) = f \nabla . \overrightarrow{F} + \nabla f . \overrightarrow{F}$.

Exercício 6

Calcular $\int_C \overrightarrow{F} . \mathrm{d}\vec{r}$:

a. $\overrightarrow{F} = \left(x^2, y^2\right)$ e C é o circulo de centro (a, b) e de raio c percorrido no sentido horario.

b. $\overrightarrow{F} = \left(y^2, x^2\right)$ e C é o circulo de centro (a, b) e de raio c percorrido no sentido horario.

c. $\overrightarrow{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ e C é o arco da parábola $y^2 = 2x + 1$ ligando o ponto $(0, -1)$ e o ponto $(0, 1)$.

d. $\overrightarrow{F} = \left(x - y^3, x^3\right)$ e é o circulo de centro $(0, 0)$ e de raio 1 percorrido no sentido horario.

e. $\overrightarrow{F} = (xyz, 0, 0)$ e C é a curva de parametrização $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos t \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercício 7

a. Calcular $\oint_C x^2 \mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y$ com C a fronteira do triângulo de vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(1, 1)$ percorrida no sentido anti-horario.

b. Calcular $\int_\gamma \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$ com γ a interseção de $x^2 + y^2 + z^2 = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ com o plano $y = x$, ligando o ponto $(0, 0, \sqrt{2})$ e o ponto $(1, 1, 0)$.

Exercício 8

Seja $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = \left(-4xe^{3y} + ze^{xz}, -6x^2 e^{3y} + 4y^2, xe^{xz} + \cos z\right)$$

a. Verificar que F é conservativo e achar uma função potencial.

b. Calcular $\int_C \overrightarrow{F}.\mathrm{d}\vec{r}$ com C a curva de parametrização $\gamma(t) = \big((t-1)(t-2), t, \frac{\pi}{2}t^5\big)$, $t \in [0,1]$.

Exercício 9

Calcular a area da região limitada pela curva $(t - \mathrm{sen}t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi]$ e pelo eixo das abscissas.

Exercício 10

Calcular $\oint_C \overrightarrow{F}.\mathrm{d}\vec{r}$ com $F(x,y) = (4x^3y^3, 3x^4y^2 + 5x)$ e C a fronteira do quadrado de vertices (-1,0),(0,-1),(1,0) e (0,1) percorrida no sentido anti-horario.

Exercício 11

Calcular $\oint_C \sqrt{y}\mathrm{d}x + \sqrt{x}\mathrm{d}y$ com C a curva formada pelas retas $y = 0$, $x = 1$ e a parabola $y = x^2$ percorrida no sentido anti-horario.

Exercício 12

Verificar que $\int_C \frac{2y}{x^3}\mathrm{d}x - \frac{1}{x^2}\mathrm{d}y$ não depende do caminho e calcular a integral quando C é uma curva ligando o ponto (1,-2) e o ponto (3,4).