Lista n°6

Exercício 1

a. Dar uma parametrização do cilindro (infinito) de eixo Ox e de raio R.

b. Dar uma parametrização da esfera centrada na origem e de raio r e achar o vetor normal exterior para todo ponto em coordenadas esfericas e em coordenadas cartesians.

Exercício 2

Seja S a superficie d'equação $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.

a. Dar uma parametrização de S.

b. Dar a equação do plano tangente a S para todo ponto de S.

c. Achar o vetor normal a S para todo ponto de S.

Exercício 3

Seja S a superficie parametrizada por $\psi(u, v) = (u, v, 1 - v^2)$ com $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.

a. Dar a equação do plano tangente a S no ponto $\psi(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

b. Calcular a area de S.

Exercício 4

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e seja S a superficie definida por

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\right\}.$$

Provar que para todo (x, y), o vetor normal a S no ponto $(x, y, f(x, y))$ é

$$\overrightarrow{N}(x, y) = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1).$$

Exercício 5

Calcular a area de S e $\iint_S f\mathrm{d}S$ para :

a. $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1\right\}$ e $f(x, y, z) = x$;

b. $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\right\}$ e $f(x, y, z) = 3x^3 \mathrm{sen} y$;

c. $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, 1 \leq z\right\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^2$;

d. S a parte da superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ que se encontra acima da paraboloide $x^2 + y^2 - 4z + 3 = 0$ e $f(x, y, z) = z$.

Exercício 6

Calcular o fluxo de $\overrightarrow{F}$ atraves de S na direção $\overrightarrow{N}$ para :

a. $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}$, $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e $\overrightarrow{N}$ a normal exterior;

b. $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, y + z \leq 3, 0 \leq z\right\}$, $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e $\overrightarrow{N}$ a normal apontando para o eixo z;

c. $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y + z = 6, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z\right\}$, $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (0, z, z)$ e $\overrightarrow{N}$ a normal tal que $\overrightarrow{N}.\overrightarrow{k} > 0$.

d. $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\right\}$, $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)$ e $\overrightarrow{N}$ a normal exterior.

Exercício 7

Verificar o Teorema de Gauss nos casos seguintes :

a. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ e $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (xz, yz, z^2)$;

b. S é a fronteira do solido interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2$ e $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x + ye^z, y + ze^x, z^2 + xe^y)$;

c. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ e $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$.

Exercício 8

Verificar o Teorema de Stokes nos casos seguintes :

a. $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x + z = 1\}$ e $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$;

b. $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + y + z = 0\}$ e $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$;

c. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ e $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x^2y^3, 1, z)$;

d. S o triangulo de vertices (1,0,0), (2,2,0) e (1,1,0) e $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (0, x^2, 0)$.