Lista de exercícios n°1

Exercicio 1

Estudar as funções seguintes (dominio, paridade, variações (crescente/decrescente), limitada por cima/baixo) :

a. $f_1(x) = x^2$

b. $f_2(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} - 2\cos(x)$

c. $f_3(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$ em $[-\pi/2, \pi/2]$

d. $f_4(x) = x^2 + x + 2$

e. $f_5(x) = \ln(x^2 + x + 2)$

Exercicio 2

Provar que a função f definida em $]0,1]$ por : $f(x) = (1-x)\sin\frac{\pi}{x}$ é limitada.

Exercicio 3

Sejam f e g duas funções definidas de $[-a, a]$ em $\mathbb{R}$, com $a > 0$, tais que f é par e g é impar.

a. Provar que se f é crescente (resp. decresente) em $[0, a]$, f é decrescente (resp. crescente) em $[-a, 0]$.

b. Provar que se g é crescente (resp. decresente) em $[0, a]$, g é crescente (resp. decrescente) em $[-a, a]$.

Exercicio 4

a. Consideramos as duas funções definidas em $\mathbb{R}$ e com valores em $\mathbb{R}$:

$$P : x \mapsto x^3 - x^2 + 4x + 5 \text{ e } Q : x \mapsto x - (\sin(x))^2 - 3.$$

Decompor P e Q numa soma de uma função par e de uma função impar.

b. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$. Provar que as funções ϕ e ψ definidas em $\mathbb{R}$ por :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ e } \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

são respectivamente par e impar.

c. Provar que toda função f definida em $\mathbb{R}$ se decompoe na soma de uma função par e de uma função impar.

Exercicio 5

Calcular os limites, quando existem (sem usar a definição formal)

a. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

b. $\lim_{x\to 1/4} sin(2\pi x)$

c. $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{|x-1|}$

d. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$