Lista de exercícios n°11

Exercício 1

Achar o domínio, estudar as variações (crescimento e decrescimento), determinar as assíntotas verticais e horizontais (caso existam), estudar a concavidade, achar os pontos de inflexões, achar os extremos relativos e absolutos (caso existam) e esboçar o gráfico das funções seguintes :

a. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

b. $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

c. $\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$.

Exercício 2

Calcular os limites seguintes :

a. $\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$;

b. $\lim_{x \to +\infty} (e^x)^{1/e^x}$;

c. $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}$;

d. $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)^{x-1}$;

e. $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(x-1)^2}$;

f. $\lim_{x \to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$;

g. $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{1-e^x}\right)^{x^2}$;

h. $\lim_{x \to +\infty} (e^x + x)^{1/x}$;

Exercício 3

Provar que se $1 < a < b$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $\frac{\ln a}{\ln b} = e^{\frac{a-b}{c \ln c}}$.

Exercício 4

Provar que para todo $x > 0$, temos

$$e^x - 1 < xe^x.$$

Exercício 5

Seja f a função definida por $f(x) = \ln(-x^2 + x + 2)$

a. Achar o dominio de f, e provar que $\forall x \in Dom(f)$ temos $f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}$.

b. Provar que $\forall x \in [0, 1]$:

$$\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

c. Provar que $\forall x \in [0, 1]$:

$$| f(x) - \ln(2) | \leq \frac{1}{2}(1 - x).$$

Exercício 6

Usando o Teorema do Valor Medio, calcular $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{1+x}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercício 7

Provar que

$$\arctan(e^x) - \arctan\left(\tanh\frac{x}{2}\right) = cte$$

e achar essa constante.

Exercício 8

Calcular

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}.$$

Exercício 9

a. Provar que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

b. Usando o item a., calcular

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \left(\cosh^3 x - \sinh^3 x\right).$$

Exercício 10

Usando o Teorema do Valor Medio com a função $f(x) = ln(x)$ em $[n, n+1]$, provar que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tende a $+\infty$ quando n tende a $+\infty$.