Lista de exercícios n°5

Exercicio 1

Estudar a continuidade em $\mathbb{R}$ das seguintes funções :

a. $f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \pi \\ x & \text{se } x > \pi \end{cases}$;

b. $f_2(x) = |x|$;

c. $f_3(x) = x^2 + 3x + 1$

d. $f_4(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e $f_4(0) = 0$;

e. $f_5(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e $f_5(0) = 0$;

f. $f_6(x) = E(x)$;

g. $f_7(x) = xE(x)$;

h. $f_8(x) = E(x) \sin(\pi x)$.

Lembramos que a função $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (função parte inteira) e definida por $E(x) = n$ onde n é o numero inteiro tal que $n \leq x < n+1$. (Exemplo : $E(0,3) = 0$, $E(7,1256) = 7$, $E(18,9999) = 18$, $E(4) = 4$).

Exercicio 2

Provar que as equações seguintes tem pelo menos uma raiz real :

a. $x^4 + x - 8 = 0$;

b. $1 - x^2 = \sqrt{x}$;

c. $\cos x = x$;

d. $\sqrt{2x - 7} = \frac{x}{x+4}$.

Exercicio 3

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continua tal que $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = 1$. Provar que

$$\big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1\big) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -1\big).$$

Exercicio 4

Seja $f : [0,1] \to [0,1]$. Considerando a função g definida em $[0,1]$ por :

$$\forall x \in [0,1], g(x) = f(x) - x,$$

provar que a função f tem um ponto fixo, ou seja um ponto x_0 tal que

$$f(x_0) = x_0.$$

Exercicio 5

Um motorista percorre $90km$ em uma hora (atenção, a velocidade dele não é necessariamente constante...). Provar que existe um intervalo de 20 minutos durante o qual ele percorreu exatamente 30km.

Exercicio 6

Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$, continua em 0 e tal que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x).$$

Provar que f é uma função constante (considerar para x fixado, a sequencia seguinte : $\forall n \geq 0, u_n = \frac{x}{2^n}$).

Dica : voce pode usar o teorema seguinte :

Teorema 1 *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função.* f *é continua em* $x_0 \in I$ *se e somente se para toda sequencia* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$ *temos* $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$.