Lista de exercícios n°9

Exercicio 1

Seja f a função

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\left(x + (1-x)e^{2x}\right) \end{array}$$

1) Achar o domínio de f.
2) Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3) Provar que a reta $y = \frac{x}{2}$ é uma assíntota inclinada da função f.
4) Provar que f é derivável em $\mathbb{R}$ e calcular $f'(x)$.
5) Seja u a função definida em $\mathbb{R}$ por $u(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$.
   a) Estudar as variações (crescimento e decrescimento) da função u.
   b) Provar que a equação $u(x) = 0$ tem uma solução no intervalo $[0, 1]$. (Podemos admitir que essa solução é única, e chamamos ela de α).
   c) Estudar o sinal da função u.
6) Estudar as variações (crescimento e decrescimento) da função f.
7) Provar que f tem um máximo global.
8) Calcular a equação da tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.
9) Estudar a concavidade da função f.
10) Calcular a área comprendida entre o gráfico da função f, o eixo das abcissas, a reta $x = 0$ e a reta $x = 1$.
11) Esboçar o gráfico da função f.

Exercicio 2

Seja f a função

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x}\ln(1+e^{x}) \end{array}$$

1) Achar o domínio de f.
2) a) Calcular $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$.
   b) Usando a questão precedente, calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   c) Provar que para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$ e calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   d) Deduzir que f tem duas assíntotas e dar as equações dessas assíntotas.
3) Seja g a função

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(g) & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{1+t} - \ln(1+t). \end{array}$$

   a) Achar o domínio da função g.
   b) Provar que a função g é estritamente decrescente no intervalo $[0, +\infty[$.
   c) Deduzir o sinal de $g(t)$ quando $t > 0$.

4) a) Calcular $f'(x)$ e escrever essa função em função de $g(e^x)$.

   b) Estudar as variações (crescimento e decrescimento) da função f.

5) Calcular a equação da tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

6) Esboçar o gráfico da função f.

7) Seja F a função

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)dt. \end{array}$$

   a) Estudar as variações (crescimento e decrescimento) da função F.

   b) Verificar que para todo $t \in \mathbb{R}$, temos $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ e calcular $\int_0^x \frac{1}{1+e^t}dt$.

   c) Usando integração por partes, calcular $F(x)$.

   d) Verificar que $F(x)$ pode se escrever das duas seguintes maneiras :

      (1) $F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2\ln 2$.

      (2) $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$.

   e) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

   f) Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} [F(x) - x]$. Dar uma interpretação gráfica do resultado.