Prova n°2

Avisos :

1. Banheiro : a partir de 30 minutos após o início da prova.
2. Celulares desligados.
3. 3 horas de prova !
4. Só terá validade o que estiver a caneta !
5. A questão extra vale 2 pontos que podem ser adicionados à nota da primeira prova.

Questão 1

Dar a definição da derivabilidade de uma função f num ponto x_0.

Questão 2

Calcular as integrais abaixo :

a. $\int_1^2 x \ln x dx$;

b. $\int_0^\pi \cos x (\text{sen} x)^3 dx$;

c. $\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx$.

Questão 3

Dadas as funções $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ e $g(x) = \text{sen}(x), -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, calcular $(g^{-1} \circ f)'(\sqrt{2})$.

Questão 4

Seja f a seguinte função :

$$\begin{aligned} f : Dom(f) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \frac{e^x}{x^2}. \end{aligned}$$

a. Achar o domínio da função f.

b. Calcular (usando o Teorema de L'Hopital) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c. Estudar as variações (crescimento e decrescimento) da função f.

d. Encontrar as assíntotas verticais e horizontais (se existirem) e justificar a resposta.

e. Provar que $f''(x) = \frac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4}$.

f. Estudar a concavidade da função f.

g. Encontrar os mínimos e máximos relativos da função f (se existirem).

h. Caso achar um extremo relativo, justificar se esse extremo é um extremo global ou não.

i. Calcular as equações das tangentes ao gráfico da função f no ponto $(1, f(1))$ e no ponto $(2, f(2))$.

j. Esboçar o gráfico da função.

Questão extra

a. Estudar a continuidade da função f, sem usar o Teorema de L'Hopital.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} \frac{-x^3+x^2+x+2}{7(x^2-10x+16)} & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 2 \\ \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

b. Provar que a equação $\cos(x^2 + x - \pi) = -\frac{e^x}{3}$ tem pelo menos uma solução real.