Lista n°1

Exercício 1

Encontrar os extremos locais das funções seguintes :

a. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
b. $f(x,y) = x^4 + y^4 - (2x-y)^2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
c. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
d. $f(x,y) = x^2 + y^2 + \cos(x^2+y^2)$ para todo $(x,y) \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
e. $f(x,y) = e^{x\mathrm{sen}(y)}$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}\times]-\pi, 2\pi[$.

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = 4 - 2x + 3y.$$

Seja A o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}.$$

Encontrar os extremos de f na região A.

Exercício 3

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y,z) = y^2 - 2xy.$$

Seja A o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 6\,,\, x \geq 1, y \geq 0\}.$$

a. Desenhar o conjunto A.
b. Encontrar os extremos de f na região A.

Exercício 4

Calcular $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ com f e A definidos por :

a. $f(x,y) = \cos(x).e^y$ e $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]$;
b. $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y^2}$ e $A = [0,1] \times [0,1]$;
c. $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$ e $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$;
d. $f(x,y) = e^{y^2}$ e $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\right\}$;
e. $f(x,y) = x^5\cos(y^3)$ e $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, x^2+y^2 \leq 2\right\}$.

Exercício 5

Calcular a área da região A limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

Exercício 6

Calcular a área da região A limitada pelas curvas $x = 4 - y^2$, $y = 2$ e $x + y + 2 = 0$.

Exercício 7

Calcular o volume do tetraedo T com faces nos planos coordenados e no plano $x + y + z = 3$.

Exercício 8

Calcular o volume do conjunto $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{xy}\right\}$.

Exercício 9

Inverter a ordem de integração nas integrais seguintes

a. $\int_{-1}^{0}\left(\int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$;

b. $\int_{0}^{1}\left(\int_{e^{y-1}}^{e^y} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

Exercício 10

Usando mudança de variáveis, calcular $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ com f e A definidos por :

a. $f(x,y) = x^2+y^2$ e $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$;

b. $f(x,y) = xy$ e $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2x, 0 \leq y\right\}$;

c. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq y\right\}$;

d. $f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y-x}}{1+y+x}$ e A é o triângulo de vértices (0,0), (1,0) e (0,1) ;

e. $f(x,y) = (2x+y)\cos(x-y)$ e A é o paralelogramo de vértices (0,0), $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$, $(\frac{2\pi}{3},\frac{-\pi}{3})$ e $(\frac{\pi}{3},\frac{-2\pi}{3})$.

Exercício 11

Achar o volume do sólido limitado superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$, inferiormente pelo plano xy e lateralmente pelo cilindro $x^2+y^2=1$.

Exercício 12

Seja C a curva obtida como interseção do circulo $x^2+y^2=1$ com o primeiro quadrante.

Calcular $\int_C xy^2\mathrm{d}s$.

Exercício 13

Seja C a curva obtida como interseção da semi-esfera $x^2+y^2+z^2=4, y\geq 0$ com o plano $x+z=2$.

Calcular $\int_C xy\mathrm{d}s$.

Exercício 14

Seja C a curva obtida como interseção da região $A = \{x^2+y^2+z^2 = 8-2(x+y), z\geq 0\}$ com o plano $x+y=2$.

Calcular $\int_C (x^2+y^2)z\mathrm{d}s$.

Exercício 15

Seja C o arco da curva obtida como interseção das superficies $x^2+y^2+z^2=4$ e $y=x$, que liga o ponto $(0,0,2)$ ao ponto $(1,1,\sqrt{2})$.

Calcular $\int_C z\mathrm{d}s$.

Exercício 16

Calcular $\int_C \overrightarrow{F}.\mathrm{d}\vec{r}$:

a. $\overrightarrow{F} = (x^2,y^2)$ e C é o circulo de centro (a,b) e de raio c percorrido no sentido horario.

b. $\overrightarrow{F} = (y^2,x^2)$ e C é o circulo de centro (a,b) e de raio c percorrido no sentido horario.

c. $\overrightarrow{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ e C é o arco da parábola $y^2=2x+1$ ligando o ponto $(0,-1)$ e o ponto $(0,1)$.

d. $\overrightarrow{F} = (x-y^3,x^3)$ e é o circulo de centro $(0,0)$ e de raio 1 percorrido no sentido horario.

e. $\overrightarrow{F} = (xyz,0,0)$ e C é a curva de parametrização $\gamma(t) = (\cos t,\sin t,\cos t\sin t)$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Exercício 17

a. Calcular $\oint_C x^2 \mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y$ com C a fronteira do triângulo de vértices $(0,0),(1,0)$ e $(1,1)$ percorrida no sentido anti-horario.
b. Calcular $\int_\gamma \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$ com γ a interseção de $x^2+y^2+z^2=2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ com o plano $y=x$, ligando o ponto $(0,0,\sqrt{2})$ e o ponto $(1,1,0)$.

Exercício 18

Seja $\overrightarrow{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z)=\left(-4xe^{3y}+ze^{xz}, -6x^2e^{3y}+4y^2, xe^{xz}+\cos z\right)$$

a. Verificar que F é conservativo e achar uma função potencial.
b. Calcular $\int_C \overrightarrow{F}.\mathrm{d}\vec{r}$ com C a curva de parametrização $\gamma(t)=\left((t-1)(t-2), t, \frac{\pi}{2}t^5\right)$, $t\in[0,1]$.

Exercício 19

Calcular a area da região limitada pela curva $(t-\mathrm{sen}t, 1-\cos t)$, $t\in[0,\pi]$ e pelo eixo das abscissas.

Exercício 20

Calcular $\oint_C \overrightarrow{F}.\mathrm{d}\vec{r}$ com $F(x,y)=(4x^3y^3, 3x^4y^2+5x)$ e C a fronteira do quadrado de vertices (-1,0),(0,-1),(1,0) e (0,1) percorrida no sentido anti-horario.

Exercício 21

Calcular $\oint_C \sqrt{y}\mathrm{d}x+\sqrt{x}\mathrm{d}y$ com C a curva formada pelas retas $y=0$, $x=1$ e a parabola $y=x^2$ percorrida no sentido anti-horario.

Exercício 22

Verificar que $\int_C \frac{2y}{x^3}\mathrm{d}x - \frac{1}{x^2}\mathrm{d}y$ não depende do caminho e calcular a integral quando C é uma curva ligando o ponto (1,-2) e o ponto (3,4).