Lista n°1

Exercício 1

As sequências seguintes são convergentes ? Se possível, achar o limite.

a. $u_n = \cos(\frac{1}{n})$;
b. $u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2}$;
c. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
d. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$;
e. $u_n = \dfrac{\sin n^2}{n}$;
f. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + n^2 \cos(n) + 3}$;
g. $u_n = \dfrac{3^n}{n}$;
h. $u_n = n + (-1)^n$;
i. $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$.

Exercício 2

Consideramos a função f definida em $]0, +\infty[$ por :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Seja $u_1 \geq \sqrt{2}$. Definimos a sequência (u_n) :

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} = f(u_n)$$

a. Estudar a função f (crescimento, decrescimento, limites, ...) e verificar que $\forall x \geq \sqrt{2}, f(x) \geq \sqrt{2}$.
b. Provar por indução que : $\forall n \geq 1, u_n \geq \sqrt{2}$.
c. Estudar a função $x \mapsto x - f(x)$ em $]0, +\infty[$. Deduzir que $\forall x \geq \sqrt{2}, x \geq f(x)$ e então que a sequência $(u_n)_n$ é decrescente.
d. Concluir que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.
e. Achar o limite da sequência $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exercício 3

Seja f a função definida por $\forall x > 0, f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
Definimos as duas sequências :

$$\forall n > 1, u_n = \frac{1}{2\pi n} \text{ e } v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

a. Calcular $\lim_{n \to +\infty} f(u_n)$ e $\lim_{n \to +\infty} f(v_n)$.
b. Provar por absurdo que f não tem limite em 0.

Exercício 4

Seja $(u_n)_{n \geq 1}$ uma sequência. Usaremos nesse exercício a definição de limite de uma sequência (com ϵ).

a. Provar que se $(u_n)_{n \geq 1}$ converge então $(u_{n+1})_{n \geq 1}$ converge e que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1}$.
b. Suponhamos que $(u_n)_n$ é estritamente positiva e converge a 0. Provar que a sequência $(1/u_n)_n$ diverge a $+\infty$.

Jérôme Rousseau

Exercício 5

Sejam $(u_n)_{n\geq 1}$ e $(v_n)_{n\geq 1}$ duas sequências. Suponhamos que :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq 1 \text{ e } 0 \leq v_n \leq 1$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1.$$

Provar que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.