Lista n°2

Exercício 1

Achar os limites das sequências seguintes :

a. $u_n = \exp\left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{2n+1}\right)$

b. $u_n = \cos\left(1+\frac{\pi}{n}\right)$

c. $u_n = \text{Arctan}\left(\frac{n^3+1}{n^2+n^2\ln(n)}\right)$

d. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Exercício 2

Seja $x \in \mathbb{R}$. Definimos $E(x) = [x]$ por :

$$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

a. Calcular $E(3)$, $E(1,5)$, $E(-1/10)$, $E(e)$.

b. Esboçar o grafico da função E.

c. Seja $n \in \mathbb{Z}$. Calcular : $\lim_{x\to n^+} E(x)$ e $\lim_{x\to n^-} E(x)$. Que podemos concluir ?

d. Provar que a função $x \mapsto E(x) - x$ é periodica e dar um periodo.

e. Calcular $\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

f. Seja $x \in \mathbb{R}$; calcular o limite de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(x)+E(2x)+E(3x)\cdots+E(nx)}{n^2}.$$

Exercício 3

Seja $(u_n)_n$ uma sequência.

a. Suponhamos que as sequências $(u_{2n})_n$ e $(u_{2n+1})_n$ são limitadas. Provar que a sequência $(u_n)_n$ é limitada.

b. Suponhamos que as sequências $(u_{2n})_n$ e $(u_{2n+1})_n$ são convergentes e tem o mesmo limite. Provar que a sequência $(u_n)_n$ converge a esse mesmo limite.

c. Aplicações :

(i) Provar que a sequência $(u_n)_n$ definida por

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é impar} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

é convergente.

(ii) Provar que a sequência $u_n = \cos(\pi n)$ (para $n > 0$) não converge.

(iii) Definimos a sequência $(u_n)_n$:

$$\forall n > 0, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Provar que a sequência $(u_{2n})_n$ é crescente e que a sequência $(u_{2n+1})_n$ é decrescente. Calcular $u_{2n+1} - u_{2n}$. Concluir que $(u_n)_n$ é convergente.