Lista n°5

Exercício 1

Determinar o raio de convergencia das séries de potencias seguintes :

a. $\sum_{n=1} (\ln n)^n x^n$

b. $\sum_{n=1} (\sqrt{n})^n x^n$

c. $\sum_{n=1} (\ln(n!))^2 x^n$

d. $\sum_{n=1} \frac{\ln(n!)}{n!} x^n$

e. $\sum_{n=1} \frac{a^n}{1+b^n} x^n$ com $a \in \mathbb{R}^{+*}$ e $b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercício 2

Lembramos que para todo $x \in (-1, 1)$ temos $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$. Usando esse fato, calcular as somas seguintes dentro do seus dominios de convergencia (depois de achar o raio de convergencia) :

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$

b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n-1} x^n$

c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$

d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n$

e. $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$

f. $\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2+1) x^n$

g. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^n + e^{-n})}{2} x^n$

Exercício 3

Lembramos que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sen} x$. Usando esse fato, calcular as somas seguintes dentro do seus dominios de convergencia (depois de achar o raio de convergencia) :

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$

b. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$ (dica : $x = (\sqrt{x})^2$ se $x \geq 0$ e $x = (\sqrt{-x})^2$ se $x \leq 0$)

c. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+5n^2+3n-1}{(n+2)!} x^n$

Dica : verificar que $n^3 + 5n^2 + 3n - 1 = (n+2)(n+1)n + 2(n+2)(n+1) - 5(n+2) + 5$.

Exercício 4

Lembramos que para todo $x \in (-1, 1)$ temos $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$. Usando esse fato, desenvolver em séries de potencias as funçoes seguintes :

a. $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

b. $\ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$

c. $\frac{x^2-3}{x^2-4x+3}$

d. $\int_0^x \frac{t^2-3}{t^2-4t+3} dt$ (dica : voce pode usar frações parciais)

e. $\arctan\left(\frac{x \text{sen} 2}{1 - x\cos 2}\right)$.

Exercício 5

Lembramos que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$ sen$x$. Usando esse fato, desenvolver em séries de potencias as funçoes seguintes :

a. $\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$

b. $\frac{e^x - \cos x}{x}$

Exercício 6

Seja f a função seguinte

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x^3}{1+x^6}. \end{array}$$

Calcular $f^{(n)}(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercício 7

Calcular o limite seguinte (sem usar l'Hopital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2520}x^7}{x^9}.$$

Exercício 8

Seja f a função tal que $f(x) = \frac{senx}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Provar que f é infinitamente derivável.