Lista de exercícios

Exercício 1

Seja E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão n e base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

a. Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ existe uma unica forma n-linear alternada φ em E tal que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = \lambda$.

b. Mostrar que se uma forma n-linear alternada pega uma valor diferente de zero numa base então ela pega valores diferentes de zero em todas as bases.

c. Mostrar que uma forma n-linear alternada não nula se anula em $(x_1, \ldots, x_n)$ se e somente $x_1, \ldots, x_n$ são L.D.

Exercício 2

Uma forma k-linear alternada é dita decomponível se ela pode ser escrita como produto exterior de k formas lineares. Seja E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão n.

a. Mostrar que toda forma n-linear alternada é decomponível.

b. Seja $\omega \in \Lambda^{n-1}(E^*)$. O que pode ser dito da transformação $T : E^* \to \Lambda^n(E^*)$ tal que $T(\alpha) = \alpha \wedge \omega$? Deduzir que toda forma $(n-1)$-linear alternada é decomponível.

c. Seja $\alpha \in E^*$. Mostrar que uma k-forma linear alternada φ pode ser decomposta em $\varphi = \alpha \wedge \psi$ se e somente se $\alpha \wedge \varphi = 0$.

d. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ formas lineares LI em E. Provar que $\omega = \alpha \wedge \beta + \gamma \wedge \delta$ não é decomponível.

Exercício 3

Simplifique a expressão

$$dx \wedge dz \wedge dy + 3dz \wedge dy \wedge dx - dy \wedge dz \wedge dx + 5dx \wedge dx \wedge dx - 7dz \wedge dz \wedge dy$$

Exercício 4

Calcule dw e $d\alpha$ onde

$$w := x^2 y dx + z dy + (y + x + 2z) dz$$

e

$$\alpha = x^2 y dy \wedge dz + z dz \wedge dx + (y + x + 2z) dx \wedge dy.$$

Exercício 5

a. Existe alguma 1-forma $w \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $w \wedge w \neq 0$?

b. Existe alguma 2-forma $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\alpha \wedge \alpha \neq 0$?

Exercício 6

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$.

a. Calcular $\varphi^*(dx \wedge dy)$.
b. Em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, calcular $\varphi^*(\alpha)$ com

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

c. Calcular $\int_{S^1} \alpha$.
d. Calcular $d\alpha$.

Exercício 7

Seja $\alpha \in \Omega^2(U)$ com $U \in \mathbb{R}^n$ aberto definida por

$$\alpha = \sum_{i<j} \alpha_{i,j} dx_i \wedge dx_j.$$

Calcular $d\alpha$.

Exercício 8

Seja α uma 1-forma na esfera S^2 tal que para todo $\varphi \in SO(3)$, $\varphi^*(\alpha) = \alpha$. Provar que $\alpha = 0$.

Exercício 9

Usar o Teorema de Stokes para provar o Teorema da divergencia.

Exercício 10

Seja ω uma 2-forma exata numa variedade de dimensão $2n$. Provar que ω^n é exata ($\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$).

Exercício 11

Seja $\omega \in \Omega^n(U)$ com $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto. Para $x \in U$, seja $S(r)$ a esfera de centro x e raio r e seja $B(r)$ a bola de centro x e raio r. Provar que se $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ é a base canonica do $\mathbb{R}^{n+1}$ então temos

$$d\omega(x)(e_1, \ldots, e_{n+1}) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{vol(B(r))} \int_{S(r)} \omega.$$

Provar que ω é fechada se e somente se para todo dominio compacto $D \subset U$ de bordo ∂D de classe C^2 temos $\int_{\partial D} \omega = 0$.

Exercício 12

Seja $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $d\omega \neq 0$ em todos os pontos da bola unitaria aberta de $\mathbb{R}^3$. Mostre que existe algum ponto x_0 da esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega(x_0) \neq 0$.

Exercício 13

Se n é par então toda 1-forma e toda $(n-1)$-forma sobre a esfera S^n devem anular-se em algum ponto.