UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MATB43- Cálculo Diferencial vetorial
:

# $1^a$ Lista de Exercícios

*Questão 1:* Encontre a equação do plano tangente ao grafico da função definida por $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + xy^4 + 10y$ em $x = 10$ e $y = 1$

*Questão 2:* Use a aproximeção linear da função $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + xy^4 + 10y$ no ponto $(10,1)$ para obter uma aproximação de $f(10.36, 1.04)$.

*Questão 3:* Use a aproximeção linear da função de produção $f(x,y) = 6x^{2/3}y^{1/2}$ no ponto $(1000, 100)$ para obter uma aproximação de $f(998, 101.5)$.

*Questão 4:* Use a aproximeção linear da função $f(x,y,z) = \sqrt{x^{1/2} + y^{1/3} + 5z^2}$ no ponto $(4,8,1)$ para obter uma aproximação de $f(4.2, 7.95, 1.02)$.

*Questão 5:* Use a aproximeção linear da função de produção $Q = 3K^{2/3}L^{1/3}$ no ponto $(100, 125)$ para obter uma aproximação de $f(998, 128)$.

*Questão 6:* Por que podemos dizer que os gráficos das funções $f(x,y) = x^2+y^2$ e $g(x,y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ são "tangentes" em $(0,0)$?

*Questão 7:* Use a aproximeção linear da função $f : D \subset \Re^3 \to \Re^2$ definida por $f(x,y,z) = \left(\frac{x+y+z}{3}, \sqrt[3]{x.y.z}\right)$ no ponto $(1,2,4)$ para obter a aproximação de $f(1.1, 1.9, 3.9)$

*Questão 8:* Calcule os polinômios de Taylor de ordem um, dois e três da função $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ em $x = 0$ e da função $y = g(x) = ln(x)$ em $x = 1$. A seguir, calcule os valores destas aproximaçãoes em $x = 0.2$ e $x = 1.2$ e compare com os valores corretos.

*Questão 9:* Calcule os polinômios de Taylor de ordem um e dois das funções abaixo nos pontos indicados.

9.1 $f(x,y) = \frac{x}{1+y}$ em $p = (0,0)$

9.2 $f(x,y) = e^x\sqrt{1+y^2}$ em $p = (0,0)$

9.3 $f(x,y,z) = x^{1/4}y^{1/2}z^{1/4}$ em $p = (1,1,1)$

9.4 $f(x,y) = Kx^a y^b$ em $p = (1,1)$

*Questão 10:* Para cada uma das funções abaixo, encontre os pontos críticos e classifique-os como mínimo local, máximo local, ponto de sela ou inconclusivo.

10.1 $f(x,y) = xy^2 + x^3y - xy$.

10.2 $f(x,y) = x^2 - 6xy + 2y^2 + 10x + 2y - 5$

10.3 $f(x,y,z) = x^4 + x^2z + y^2 + \frac{z^2}{2} + xy$

10.4 $f(x,y,z) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2)e^{(x^2+y^2+z^2)}$

*Questão 11:* Caso exista, determine o valor mínimo global de $f(x,y) = x^2(1-y)^3 + y^2$ e o ponto onde ocorre.

*Questão 12:* Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenadors e com vértice no plano $x+2y+3z = 6$. (Assuma que existe solução)

*Questão 13:* Encontre os pontos de máximo e de mínimo global de $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ dentro e sobre o triângulo com vértices $(0,0)$, $(0,9)$ e $(9,0)$.

*Questão 14:* Um arame com o formato do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ é esquentado de modo que sua temperatura num ponto $(x,y)$ é dada por $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determine os pontos do arame em que a temperatura é máxima e os pontos do arame em que a temperatura é mínima.

*Questão 15:* Determine os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x,y) = x^2+2y^2-x$ no conjunto $A = \{(x,y) \in \Re^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

*Questão 16:* Determinar os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ sobre a elipse $2x^2 + y^2 = 1$.

*Questão 17:* Determine os pontos mais distantes da origem do sistema cartesiano e cujas coordenadas pertencem a interseção do elipsóide $x^2+4y^2+z^2 = 4$ com o plano $x+y+z = 1$.

*Questão 18:* Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os extremos de $f(x,y,z,t) = xyzt$ sujeito aos vínculos $x - z = 2$ , $y^2 + t = 4$

*Questão 19:* Deve-se construir um depósito com tampa em forma de um cilindro circular reto e com área de superfície A fixa. Determine as dimensões que maximizem o volume

*Questão 20:* Usando multiplicadores de Lagrange prove que o produto dos senos dos ângulos de um triângulo é máximo quando o triângulo é equilátero.

*Questão 21:* Calcule as integrais duplas a seguir:

21.1 $\int\int_D cos\frac{x}{2} senydxdy$ , onde $D$ é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$ e $(0, \frac{\pi}{2})$.

21.2 $\int\int_D ydxdy$ onde $D = \{(x,y) \in \Re^2; 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

*Questão 22:* Calcule $\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2} dxdy$

*Questão 23:* Calcule $\int_1^5 \int_x^5 \frac{y}{xlny} dydx$

*Questão 24:* Use a integral dupla para calcular a área da rregião $D$ limitada pelas curvas $y = 4x - x^2$ e $y = x$.

*Questão 25:* Encontre o volume do sólido $W$ limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$, $z \geq 0$, $x = 0$, $z = 0$ e $x - y = 2$.

*Questão 26:* Calcule $\int\int_D \frac{x-y}{x+y} dA$ onde $D$ é a regiao compreendida pelas retas $x - y = 0$, $x - y = 1$, $x + y = 1$ e $x + y = 3$.

*Questão 27:* Use a transformação $u = \frac{y}{x}$ e $v = xy$ para determinar $\int\int_D xy^3 dA$ da região D do primeiro quadrante, limitada por $y = x$, $y = 3x$, $xy = 1$ e $xy = 4$.

*Questão 28:* Calcule a integral dupla $\int\int_D e^{-(x^2+y^2)} dA$ onde $D$ é a regiao contida na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

*Questão 29:* Calcule $\int\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$ onde $D$ é o disco centrado fora da origem, dado pela desigualdade $x^2 + y^2 \leq 2y$ ou $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

*Questão 30:* Calcule $\int\int_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dA$ onde $D$ é a região no primeiro quadrante fora da circunferência $r = 2$ e dentro do cardióide $r = 2(1 + cos\theta)$.

*Questão 31:* Determine o volume do sólido $W$ no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e do cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$ e acima do plano $z = 0$.

**Respostas**

*Questão 1:* $z = -30640 + 4041x + 450y$

*Questão 2:* $f(10.36, 1.04) \approx 11692.76$

*Questão 3:* $f(998, 101.5) \approx 6037$

*Questão 4:* $f(4.2, 7.05, 1.02) \approx 3.040972223$

*Questão 5:* $f(998, 128) \approx 1510$

*Questão 6:* Porque $f$ e $g$ possuem o mesmo plano tangente no ponto $(0,0)$

*Questão 7:* $f(1.1, 1.9, 3.9) = (2.3, 2.016...)$

*Questão 8:* Para $f(x) = \sqrt{x+1}$ temos $p_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$, $p_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $p_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$, $p_1(0.2) = 1.1$, $p_2(0.2) = 1.095$, $p_3(0.2) = 1.0955$.

Para $g(x) = ln(x)$ temos $p_1(x) = x - 1$, $p_2(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$, $p_3(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$, $p_1(1.2) = 0.2$, $p_2(1.2) = 0.18$, $p_3(1.2) = 0.182666666....$

*Questão 9:*

9.1 $p_1(x,y) = x$ e $p_2(x,y) = x - xy$

9.2 $p_1(x,y) = 1 + x$ e $p_2(x,y) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

9.3 $p_1(x,y,z) = -\frac{1}{4} + \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2}$ e $p_2(x,y,z) = \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} - \frac{3x^2}{32} + \frac{xz}{16} + \frac{xy}{8} - \frac{3z^2}{32} - \frac{y^2}{8} + \frac{yz}{8}$

9.4 $p_1(x,y) = k - ka - kb + kax + kay$ e $p_2(x,y) = k - \frac{3ka}{2} - \frac{3kb}{2} + \frac{ka^2}{2} + kab + \frac{kb^2}{2} + 2kax - kabx - ka^2x + 2kby - kaby - kb^2y + \frac{ka^2x^2}{2} - \frac{kax^2}{2} + \frac{kb^2y^2}{2} - \frac{kby^2}{2} + kabxy$

*Questão 10:*

10.1 $(0,0)$ é ponto de sela de $f$, $(1,0)$ é ponto de sela de $f$, $(-1,0)$ é ponto de sela de $f$, $(0,1)$ é ponto de sela de $f$, $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5})$ é ponto de mínimo local de $f$ e $(\frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5})$ é ponto de máximo local de $f$

10.2 $(\frac{13}{7}, \frac{16}{7})$ é ponto de sela de $f$

10.3 $(0,0,0)$ é ponto de sela, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ é ponto de mínimo local e $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ é ponto de mínimo local de $f$

10.4 $(0,0,0)$ é ponto de mínimo local

*Questão 11:* $f$ não possui mínimo global

*Questão 12:* $V = \frac{4}{3}uv$

*Questão 13:* o ponto de máximo ocorre em $(1,1)$ e os pontos de mínimo ocorrem em $(9,0)$ e $(0,9)$.

*Questão 14:* A temperatura é máxima nos pontos $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e mínima em $(1,0)$.

*Questão 15:* Os pontos de máximos são $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ e mínimo é $(\frac{1}{2}, 0)$.

*Questão 16:* os pontos $(0, \pm 1)$ sao pontos de máximo e os pontos$(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ são pontos de mínimos.

*Questão 17:* os pontos mais afastados da origem são $(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2})$ e $(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2})$ e o ponto mais próximo da origem é $(0,1,0)$

*Questão 18:* $(1, \frac{2}{\sqrt{3}}, -1, \frac{8}{3})$ é o ponto de mínimo e $(1, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -1, \frac{8}{3})$ é o ponto de máximo

*Questão 19:* a altura deve ser duas vezes o raio.

*Questão 21:*

21.1 $\frac{\pi}{2}$.

21.2 $\frac{16}{3}$.

*Questão 22:* $e^4 - 1$

*Questão 23:* 12

*Questão 24:* $\frac{9}{2}u.a$

*Questão 25:* $\frac{8}{3}u.v.$

*Questão 26:* $\frac{1}{4}ln3$

*Questão 27:* 21

*Questão 28:* $(1-e^{-1})\pi$

*Questão 29:* $\frac{32}{9}$

*Questão 30:* $\frac{8}{3}$

*Questão 31:* $\frac{8}{9}(3\pi-4)u.v.$