UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DISCIPLINA: Cálculo Diferencial Vetorial
ALUNO(A): :______________________________

LISTA 3

Questão 1: Sabe-se que o campo $\vec{F} = (e^{x+y}+1)\vec{i} + ex + y\vec{j}$ é um campo conservativo em $\Re^2$.

a) Encontre uma função potencial para $\vec{F}$.

b) Calcule $\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ onde C é o arco de circunferência $(x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, com $x \geq 1$ que vai de $(1,0)$ a $(1,1)$

resp:

a) $\varphi(x,y) = e^{x+y} + x + e$

b) $e^2 - e$

Questão 2: Determine uma função potencial para cada campo conservativo

a) $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$

b) $\vec{F}(x,y) = (cos(xy) - xysen(xy))\vec{i} + (x^2 sen(xy))\vec{j}$

c) $\vec{F}(x,y) = (6xy^3 + 2z^2, 9x^2y^2, 4xz + 1)$

resp:

a) $\varphi(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + c$

b) $\varphi(x,y) = xcos(xy) + c$

c) $\varphi(x,y) = 3x^2y^3 + 2xz^2 + z + c$

Questão 3: Calcule a integral de linha diretamente e, também, pelo teorema de Green:

$$\oint_C xdx + y^2dy$$

onde C é o caminho fechado formado por $y = x^2$ e $y = x$, no sentido anti-horário.

resp:0

Questão 4: Utilize o teorema de Green para calcular:

a) $I = \oint_C -\dfrac{x^2y}{1+x^2}dx + arctgxdy$ onde C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ e $x = 0$, no sentido anti-horário.

b) $I = \oint_C e^x senydx + (x + e^x cosy)dy$ onde C é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$, no sentido anti-horário.
c) $I = \oint_C 2arctg\frac{y}{x}dx + (ln(x^2 + y^2) + x)dy$ onde C parametrizada por $x = 4 + 2cost$ e $y = 4 + sent$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

resp:

a) 1

b) $2\sqrt{6}\pi$

b) 2π

<u>*Questão 5:*</u> O teorema de Green pode ser utilizado´para calcular a integral de linha

$$I = \oint_C \frac{-y}{y^2 + x^2}dx + \frac{x}{y^2 + x^2}dy$$

.
a) onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário?
b) onde C é o triângulo com vértices $(1, 0)$, $(1, 2)$ e $(2, 2)$, orientado no sentido anti-horário?
c) Qual o valor da integral de linha onde C é o triâmgulo da parte b)?
resp:
a) Como a região compacta D, limitada por C, contém a origem $(0, 0)$, então D não está contida em U. Assim não podemos aplicar o teorema de Green na região D.
b) Como a região compacta D, limitada por C, está contida em U, pois não contém $(0, 0)$, então podemos aplicar o teorema de Green.
c) 0

<u>*Questão 6:*</u> *Use a integral de linha para calcular a área da regiaõ plana limitada pelas curvas* $y = x^2$ *e* $x = y^2$
resp: $\frac{1}{3}$*u.a.*

<u>*Questão 7:*</u> *Uma partícula move-se ao longo da circunfer encia* $y = \sqrt{4 - x^2}$ *do ponto* $(2, 0)$ *até* $(-2, 0)$. *Determine o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força a seguir:* $\vec{F}(x, y) = (x + e^{y^2}, x^3 + 3xy^2 + 2xye^{y^2})$
resp: 4*u.w.*

<u>*Questão 8:*</u> *Mostre que*

$$I = \int_{(0,1)}^{(2,3)} (2x + y^3)dx + (3xy^2 + 4)dy$$

é independente do caminho e calcule-a
resp: 66

<u>*Questão 9:*</u> *Usando o teorema de Green, calcule* $\oint_C (y, -x)(dx, dy)$, $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

orientada no sentido anti-horário.
resp: $\frac{-1}{28}$

Questão 10: *Usando o teorema de Green, calcule a área da região plana limitada pelas curvas:*
a) elipse: $x = acost, \quad y = bsent, \;\; 0 \leq t \leq 2\pi$
b) astróide: $x = acos^3t, \;\; y{=}asen^3t, \;\; 0 \leq t \leq 2\pi$
resp:
a)πab,
b)$\frac{3\pi a^2}{8}$

Questão 11:
a) Mostre que $I = \int_C (x + 3y + y^{10})dx + (3x + 10xy^9 + ln(1 + y^2))dy$ *é independente do caminho.*
b) Calcule a integral I *para* $C : (x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, *com* $y \geq 0$, *no sentido horário.*
resp:
a)
b)2

Questão 12:
a) Mostre que $I = \int_C (1 + 2xy + lnx)dx + x^2dy$ *é independente do caminho e calcule o valor de* I *onde* C *é dada por* $\gamma(t) = (1 + cost, sent)$, *com* $\frac{-\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
resp:
a)
b)2

Questão 13
a) A integral $I = \displaystyle\int_C (senxy + xycosxy)dx + x^2cosxydy$ *é independente do caminho?*
b) Calcule o valor I *onde* C *é dada por* $\sigma(t) = (t^2 - 1, t^2 + 1)$, *com* $0 \leq t \leq 1$.
resp:$-sen1$

Questão 14: *Seja um campo de forças dado por*

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3x^2yz + e^z, x^3z, x^3y + xe^z + 3z^2)$$

a)$\overrightarrow{F}$ *é um campo conservativo? Por que?*
b) Calcule o trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$ *para mover uma particula ao longo da curva* C *interseção da superfície* $z = 1 - x^2$ *com o plano* $y + z = 1$, *orientada no sentido do crescimento de* x.
resp:
a)Como dom $\overrightarrow{F} = \mathbb{R}^3$, *que é um conjunto simplesmente conexo e rot*$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, *então pelo teorema das equivalências, segue que* $\overrightarrow{F}$ *é conservativo.*
b)$2u.w$

Questão 15: *Seja* S *a superfície parametrizada por* $\varphi(u, v) = (u, v, 1 - v^2)$, *com* $u \geq 0$, $v \geq 0$ *e* $u + v \leq 1$.

a)Desenhe S
b)Determine o plano tangente a S no ponto $\varphi(1/2, 1/4)$
c) Determine a área de S
resp:
b) $\frac{13}{8}$
c) $\frac{\sqrt{15}}{12} + \frac{1}{4}ln(2 + \sqrt{5} + \frac{1}{12})u.a.$

Questão 16: Parametrize as superfífcies abaixo, indicando o domínio dos parâmetros:
a)$S = \{(x, y, z) \in \Re^3/x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 1\}$
b)$S = \left\{(x, y, z) \in \Re^3/z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$
c)$S = \{(x, y, z) \in \Re^3/x + y + z = 2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$
d)$S = \{(x, y, z) \in \Re^3/x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \leq z \leq 2 + \frac{x}{4} - \frac{y}{2}\}$
e)$S = \{(x, y, z) \in \Re^3/x^2 + y^2 = 2y, \quad 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$
resp:
a) $\varphi(r, \theta) = (rcos\theta, rsen\theta, \sqrt{4 - r^2})$, com $0 \leq r \leq \sqrt{3}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$
b) $\varphi(r, \theta) = (rcos\theta, rsen\theta, \sqrt{3}r)$, com $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$
c) $\varphi(r, \theta) = (rcos\theta, rsen\theta, 2 - rcos\theta - rsen\theta)$, com $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$
d) $\varphi(\theta, z) = (2cos\theta, 2sen\theta, z)$, com $0 \leq z \leq 2 + \frac{cos\theta}{2} - sen\theta$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$
e) $\varphi(t, z) = (cost, 1 + sent, z)$, com $0 \leq z \leq 2(1 + sent)$ e $0 \leq t \leq 2\pi$

Questão 17: Seja $C = \{(0, y, z) \in \Re^3/z^2 + (y - 2)^2 = 1\}$.Ache a área da superfície gerada pela rotação do conjunto C em torno do eixo Z.
resp:
a) $8\pi^2 u.a.$

Questão 18: Seja S a superfície obtida girando-se o segmento de reta de $(0, 1, 3)$ a $(0, 3, 1)$ em torno do eixo Z
a) Dê uma parametrizaçãode S.
b) Calcule a área de S.
resp:
a) $\varphi(t, \theta) = ((1 + 2t)cos\theta, (1 + 2t)sen\theta, 3 - 2t)$ com $0 \leq t \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$
b) $8\pi\sqrt{2}u.a$

Questão 19: Determine a área do parabolóide $z = 2(x^2 + y^2)$, abaixo do plano $z = 8$
resp: $\frac{\pi}{24}(65\sqrt{65} - 1)u.a$

Questão 20: Calcule a área da superfície S parte do plano $x + y + z = a$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = a^2$
resp: $\sqrt{3}\pi a^2 u.a.$

Questão 21: Determine a área da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, cortada pela parte superior do cone $x^2 + y^2 = z^2$
resp: $\pi(2 - \sqrt{2})u.a.$

Questão 22: Calcule $\int\int_S (z - x^2 + xy^2 - 1)dS$, onde S é a superfície

$$\varphi(u, v) = u \vec{i} + v \vec{j} + (u^2 + 1) \vec{k}$$

com $0 \leq u \leq 1$ *e* $0 \leq v \leq 2$
resp: $\frac{2}{9}(5\sqrt{5}-1)$

Questão 23: *Calcule* $\int\int_S f(x,y,z)dS$, *onde* $f(x,y,z) = x^2+y^2$ *e* $S : x^2+y^2+z^2 = 4$, *com* $z \geq 1$.
resp: $\frac{20\pi}{3}$.

Questão 24: *Calcule* $\int\int_S x^2 z dS$, *onde* S *é o cilindro* $x^2+y^2 = a^2$, *com* $0 \leq z \leq 1$.
resp: $\frac{\pi a^3}{2}$.

Questão 25: *Calcule* $\int\int_S x dS$, *onde* S *é o triângulo com vértices* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$
resp: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Questão 26: *Seja* S *a porção do cone* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *limitado pelos planos* $z = 1$ *e* $z = 4$.
a) Parametrize S *usando as coordenadas cartesianas.*
b) Parametrize S *usando as coordenadas polares.*
c) Calcule $\int\int_S z^2 dS$
resp:
a) $\varphi(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$, *com* $(x,y) \in D : 1 \leq x^2+y^2 \leq 16$.
b) $\varphi(r,) = (r cos\theta, r sen\theta, r)$, *com* $(x,y) \in D_{r\theta} : 1 \leq r \leq 4$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
c) $\frac{255\sqrt{2}\pi}{2}$.

Questão 27: *Calcule* $\int\int_S \vec{F}\vec{n}\ dS$, *sendo* $\vec{F}\ (x,y,z) = y\ \vec{i}\ - x\ \vec{j}$ *e* S *a parte da esfera* $x^2+y^2+z^2 = a^2$, *no primeiro octante com a normal apontando para fora.*
resp: 0

Questão 28: *Calcule* $\int\int_S \vec{F}\vec{n}\ dS$, *sendo* $\vec{F}\ (x,y,z) = (x,y,-2z)$ *e* S *é a esfera* $x^2+y^2+z^2 = 4$, *com o vetor normal* $\vec{n}$ *exterior.*
resp: 0

Questão 29: *Calcule* $\int\int_S \vec{F}\vec{n}\ dS$, *onde* $\vec{F}\ (x,y,z) = x^2\ \vec{i}\ + y^2\ \vec{j}\ + z^2\ \vec{k}$ *e* S *é a superfície* $x+y = 2$, *delimitada pelos planos coordenados e pelo plano* $z = 4$ *e a normal se afasta da origem.*
resp: $\frac{64}{3}$

Questão 30: *Calcule* $\int\int_S \vec{F}\vec{n}\ dS$, *onde* $\vec{F} = (x, y, \frac{-z^2}{2})$, *e* S *é a superfície de revolução obtida girando-se o segmento de reta* AB, *com* $A = (0,1,2)$ *e* $B = (0,2,4)$ *em torno do eixo* z, *onde o vetor normal* $\vec{n}$ *é exterior a* S.
resp: $\frac{56\pi}{3}$

Questão 30: *Calcule* $\int\int_S \vec{F}\vec{n}\ dS$, *onde* $\vec{F} = (x, y, \frac{-z^2}{2})$, *e* S *é a superfície de revolução obtida girando-se o segmento de reta* AB, *com* $A = (0,1,2)$ *e* $B = (0,2,4)$ *em torno do eixo* z, *onde o vetor normal* $\vec{n}$ *é exterior a* S.
resp: $\frac{56\pi}{3}$

Questão 31: Calcule $\int\int_S \vec{F}\vec{n}\ dS$, onde $F = 3y^2z\ \vec{i}\ +y\ \vec{j}\ +z\ \vec{k}$ e S é a superfície plana $y + z = 2$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com campo de vetores normais $\vec{n}$ tal que $\vec{n}\ .\ \vec{k} < 0$.
resp: -2π

Questão 32: Verifique o teorema de Gauss calculando a integral de superfície e a integral tripla para o campo $\vec{F}\ (x, y, z) = 2x\ \vec{i}\ +2y\ \vec{j}\ +z^2\ \vec{k}$ e S é a superfície da seguinte região:

$$W = \left\{(x, y, z)|x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\right\}$$

resp: 5π

Questão 33: Aplique o teorema da divergência para achar o fluxo do campo $\vec{F}$ através de S, orientada positivamente:
a) $\vec{F}\ (x, y, z) = (x^2 + y^2)\ \vec{i}\ +(y^2 - 2xy)\ \vec{j}\ +(4z - 2yz)\ \vec{k}$, onde S é a superfície do sólido W imitado pelo cone $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ e pelo plano $x = 3$.
b) $\vec{F}\ (x, y, z) = (x^3 + ysenz)\ \vec{i}\ +(y^3 + zsenx)\ \vec{j}\ +z^3\ \vec{k}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$.
c) $\vec{F}\ (x, y, z) = (xy^2 + cosz)\ \vec{i}\ +(x^2y + senz)\ \vec{j}\ +e^y\ \vec{k}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.
resp:
a) 36π
b) $\frac{186\pi}{5}$
c) $\frac{32\pi}{3}$

Questão 34: Fechando de uma forma adequada as superfícies abertas dadas, e utilizando o teorema de Gauss, calcule o fluxo do campo $\vec{F}$ através de S, com $\vec{n}$ exterior à superfície fechada
a) $\vec{F}\ (x, y, z) = (0, 0, 2z)$ onde S é a superfície do paralelepípedo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$, exceto a face superior;
b) $\vec{F}\ (x, y, z) = (x, y, z)$ onde $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $z \leq 0$;
c) $\vec{F}\ (x, y, z) = zarctg(y^2)\ \vec{i}\ +z^3ln(x^2 + 1)\ \vec{j}\ +z\ \vec{k}$ onde $S : z = 2 - x^2 - y^2$, com $1 \leq z \leq 2$.
resp:
a) 0
b) $2\pi a^3$
c) $\frac{3\pi}{2}$

Questão 35: Calcule $\int\int_S(rot\ \vec{F}).\ \vec{n}\ dS$, sendo $\vec{F}\ (x, y, z) = (e^x - y)\ \vec{i}\ +(xz + y^2)\ \vec{j}\ +2yz\ \vec{k}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, com $z \leq 1$, orientada com $\vec{n}$ exterior.
resp: -6π

Questão 36: *Verifique o teorema de Stokes, calculando a integral de linha e a integral de superfície para o campo* $\vec{F}$ *e a superfície* S.

a) $\vec{F}(x,y,z) = 2y\,\vec{i} - z\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, *S é a parte do parabolóide* $z = 4 - x^2 - y^2$ *interior ao cilindro* $x^2 + y^2 = 1$, *sendo* $\vec{n}$ *tal que* $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$

b) $\vec{F}(x,y,z) = (2z, x, 3y)$, *e S a porção do plano* $x - z = 0$, *contida no cilindro* $x^2 + y^2 = 4$, *sendo* $\vec{n}$ *tal que* $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$

resp:

a) -2π

b) -8π

Questão 37: *Use o teorema de Stokes para calcular* $\int_C \vec{F}\, d\,\vec{r}$, *onde:*

a) $\vec{F}(x,y,z) = yz\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$ *e C é o quadrado de vértices* $(0,0,2)$, $(1,0,2)$, $(1,1,2)$ *e* $(0,1,2)$, *orientado no sentido anti-horário quando visto de cima;*

b) $\vec{F}(x,y,z) = (y - z, z - x, x - y)$, *e C é a curva interseção do cilindro* $x^2 + y^2 = 1$, *com o plano* $x + z = 1$, *orientada no sentido anti-horário quando vista de cima;*

resp:

a) $-\frac{3}{2}$

b) -4π

Questão 38: *Use o teorema de Stokes para calcular* $\int_C rot\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$

a) $\vec{F}(x,y,z) = x^2 e^{yz}\,\vec{i} + y^2 e^{x^2}\,\vec{j} + z^2 e^{xy}\,\vec{k}$, *S é o hemisfério* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, *com* $z \geq 0$ *e com orientação para cima.*

b) $\vec{F}(x,y,z) = (xy^2, x, z^3)$, *e S qualquer superfície cujo bordo seja a curva* $\gamma(t) = (2cost, 3sent, 1)$, *com* $0 \leq t \leq 2\pi$, *com a normal apontando para cima.*

resp:

a) 0

b) 6π

Questão 39: *Seja* $\vec{F}(x,y,z) = (8x^3 + z^2, -3z, 2xz - 3y)$

a) $\vec{F}$ *é um campo conservativo em* $\Re^3$*? porque?*

b) Se C é o segmento de reta que liga $(0,0,0)$ *a* $(2,1,3)$, *calcule* $\int_C \vec{F}\, d\,\vec{r}$.

resp:

a) sim

b) 41