Prova n°1

Avisos :

1. Banheiro : a partir de 30 minutos após o início da prova.
2. Celulares desligados.
3. 2 horas de prova !
4. Só terá validade o que estiver a caneta !

Questão 1

Enunciar o teste da razão.

Questão 2

Usando as séries geométricas, provar que $0,9999999999...... = 1$.

Questão 3

a. Usando o teste de comparação de séries, estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{4n}{4n^2 - 2n - 1}$.

b. Usando o teste de comparação com limite de séries, estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2n^2 + n + 7}{5n^5 - n - 3}$.

c. Usando o teste da integral, estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

d. Usando o teste da raiz, estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{3^n}{\left(\sqrt{n+1}\right)^n}$.

e. Usando o teste da razão, estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1} \sqrt{n}!\operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right)\dots\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Questão 4

Estudar a convergência das séries de termos gerais

a. $u_n = \arctan\left(\frac{2n^3+3n+\sqrt{n}}{2n^2+n\ln(n)+3}\right)$;

b. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/n}+\ln(n+1)}$.

Questão 5

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida por $u_0 = 0$ e $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Provar que a função f seguinte é crescente :

$$\begin{array}{rcl} f : [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2+x} \end{array}$$

b. Usando a questão anterior, provar por indução que $(u_n)_n$ é crescente (observação : $u_{n+1} = f(u_n)$).

c. Provar por indução que $u_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

d. Provar que $(u_n)_n$ é convergente.

e. Provar que $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$ é positivo e verifica a equação $L^2 - L - 2 = 0$.

f. Achar L.