Prova n°2

Avisos :

1. Celulares desligados.
2. 2 horas de prova!
3. Só terá validade o que estiver a caneta!

Questão 1

Seja f uma função infinitamente derivável em a. Dar a definição de série de Taylor de f no ponto a.

Questão 2

Desenvolver em série de potências a função f definida por $f(x) = \frac{x}{2-3x}$ para todo $x \neq \frac{2}{3}$.

Questão 3

Lembramos que para todo $x \in (-1,1)$ temos $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Lembramos que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} x$. Calcular as somas seguintes dentro dos seus domínios de convergência (depois de achar o raio de convergência) :

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)x^n$

b. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$

Questão 4

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função 2π-periódica tal que $f(x) = x+1$ se $x \in]-\pi, 0]$ e $f(x) = 1$ se $x \in]0, \pi]$.

a. Esboçar o gráfico da função f (não precisa justificar).

b. Calcular a série de Fourier da função f.

c. Calcular $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

d. Calcular $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Questão 5

Resolver a equação diferencial seguinte em $[1, +\infty[$:

$$xy' + y = y^2 x^3 e^x.$$

Questão 6

Resolver a equação diferencial seguinte em $]0, +\infty[$:

$$\begin{cases} xy' = x^4 + 3y \\ y(1) = 5. \end{cases}$$